Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

I Rappels

Définition 1 Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_r$ est **directe**, et on la note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ ou $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ lorsque :

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_r,\ \exists!\,(x_1, \cdots x_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r, \quad \text{tel que } x = x_1 + \cdots + x_r$$

Proposition 1 Soit E un espace vectoriel <u>de dimension finie</u> et $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ une somme directe de sous-espaces vectoriels (non réduits à $\{0\}$). Soient $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $F_1, \ldots, F_r$.

- Alors la famille obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ est une base de $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.
- $\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim(F_i)$.

Proposition 2 Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie).
Soient $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $F_1, \ldots, F_r$.
Si la famille obtenue par **concaténation** de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ est une base de E, alors la somme des F_i est directe et de plus : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r = E$.

Corollaire 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$.

Si on partitionne $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$, et si on pose $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

II Eléments propres d'un endomorphisme

II.1 Définitions

Définition 2 (Eléments propres d'un endomorphisme)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur x est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de f et est noté spec(f).
- Si λ est une valeur propre de f, alors $E_\lambda = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}$ est appelé sous-espace propre associé à λ

Notation : $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = V(\lambda) = E_\lambda = V_f(\lambda) = ...$ **à préciser....**
Exemple 1 Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x, y + 3z, 4y)$ Calculer $f(e_1)$, montrer que 2 est une valeur propre de f, déterminer le sous espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda = 2$.
Exemple 2 Pour tout $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-y, x)$. Valeurs propres de f ?

II.2 Propriétés

Proposition 3 Soit f un endomorphisme de E.

1. Le sous espace propre de f associé à λ est le noyau de $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$:
$$E_\lambda = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$$
C'est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Les afirmations suivantes sont équivalentes :
   (a) λ est une valeur propre de f
   (b) $\exists x \neq 0, \quad f(x) = \lambda x$
   (c) $\exists x \neq 0, \quad f(x) - \lambda x = 0$
   (d) $Ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$
   (e) $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas injective
   (f) $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas bijective (valable si E de dimension finie)

Théorème 1 (dem)
(a) 2 vecteurs propres de f associés à 2 valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 sont linéairement indépendants.
(b) p vecteurs propres de f associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ forment une famille libre.
(c) Si E est de dimension n, alors tout endomorphisme f de E admet au maximum n valeurs propres distinctes.

Théorème 2 (Somme de sous-espaces propres)
Un somme finie de sous-espace propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Autrement dit : si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes, alors les sous espaces propres associés $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.
Conséquence : $\dim(E_{\lambda_1}) + ... + \dim(E_{\lambda_p}) \leqslant \dim(E)$ (lorsque les dimensions sont finies)

Preuve Démonstration par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose H_r : « Si $F_1, \cdots, F_r$ sont des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de f, alors la somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe ».
Démonstration à faire ...

Proposition 4 (Vecteurs propres et sous espace stable. (dem))
- Un vecteur x **non nul** de E est un vecteur propre de f si et seulement $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
- Soit $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$. Si f et g commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

II.3 Polynôme d'endomorphisme et valeur propre

Proposition 5 (dem) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit P un polynôme.
Soit x un vecteur de E tel que $f(x) = \lambda x$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x)$
Autrement dit : si $P = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$ et $x \in E_\lambda$ alors $P(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^k\right) x$.

Proposition 6 (Valeur propre et racine d'un polynome annulateur)
Si P est un polynome annulateur de f et si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de P.
La réciproque est fausse : toute racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre.

Remarque 1 Le résultat précédent est à exploiter lorqu'on dispose d'un polynome annulateur de f, et que l'on cherche les valeurs propres de f : il n'est pas nécessaire de faire une recherche générale des valeurs propres, il suffit de les chercher parmi les racines du polynome annulateur .
Exemple 3 Valeurs propres d'un projecteur ? D'une symétrie vectorielle ?

III Eléments propres d'une matrice carrée

III.1 Définitions

Définition 3 (Eléments propres d'une matrice carrée) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
- λ est une <u>valeur propre</u> de A si et seulement si il existe une matrice colonne X **non nulle** de $M_{n,1}$ telle que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur X est appelé <u>vecteur propre</u> de A associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé <u>spectre</u> de A et est noté $\mathrm{spec}(A)$.
- Si λ est une valeur propre de A, alors $E_\lambda = \{X \in M_{n,1},\, AX = \lambda X\} = Ker(A - \lambda I)$ est appelé <u>sous-espace propre</u> associé à λ

Notation : $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = V(\lambda) = E_\lambda = V_A(\lambda) = ...$ **à préciser....**

III.2 Propriétés

Proposition 7 Si E est rapporté à une base $\mathcal{B}$, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ alors :

$$\left(\overrightarrow{x} \in E \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda\right) \iff \left(\begin{array}{l} X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x}) \text{ est vecteur propre de } A \\ \text{associé à} \lambda \end{array}\right).$$

Remarque 2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
La traduction des propriétés (du paragraphe II.2) sur la matrice A donne :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } f & \iff & \lambda \text{ est une valeur propre de } A \\ & \iff & \exists X \neq 0, \quad AX = \lambda X \\ & \iff & \exists X \neq 0, \quad (A - \lambda I)X = 0 \\ & \iff & \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ & \iff & (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible} \\ & \iff & \det(A - \lambda I) = 0 \end{array}$$

Exemple 4 Déterminer les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner une base de chaque sous-espace propre.
Même question pour la matrice $aJ + bI$; avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Remarque 3 Il peut arriver que le spectre dépende du corps $\mathbb{K}$ considéré. Dans ce cas, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. Considérons par exemple la matrice $R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ où $x \not\equiv 0[\pi]$. Quel est le spectre de $R(x)$ dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Théorème 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, rapporté à une base B.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base B, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de f
2. $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ (ou $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{\overrightarrow{0}\}$)
3. $\dim \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \geq 1$
4. $\lambda \mathrm{Id}_E - f$ n'est pas bijective
5. $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible
6. $\det(\lambda I_n - A) = 0$ (ou $\det(A - \lambda I_n) = 0$)
7. λ est valeur propre de A

Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

De plus : les dimensions des sous-espaces propres associés sont les mêmes car : $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$.

III.3 Polynôme de matrice et valeur propre

Proposition 8 (Polynome annulateur et valeur propre d'une matrice)
Si P est un polynome annulateur d'une matrice A et si λ est une valeur propre de A alors λ est une racine de P.
La réciproque est fausse : toute racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre de A

Exemple 5 On admet que $P = X^3 - X^2 - 2X$ annule la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f est un endomorphisme de E.

IV Polynôme caractéristique

IV.1 Introduction

Rappels : Nous avons vu que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff$
Nous allons donc étudier plus précisément $(x \mapsto \det(xI_n - A))$.

Exemple 6

1. Déterminer $\det(xI_2 - A))$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(xI_3 - A))$ est une fonction polynomiale de degré 3.

Theorème-Definition 4 (Polynôme caractéristique)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $(\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \mapsto \det(xI_n - A))$ est une fonction polynomiale.
  Le polynôme ainsi défini, est appelé **polynôme caractéristique de** A (et souvent noté χ_A).
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application $(\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \mapsto \det(xId_E - f))$ est une fonction polynomiale.
  Le polynôme ainsi défini est appelé **polynôme caractéristique de** f (et souvent noté χ_f).
- Si A est la matrice de f dans une base quelconque $\mathcal{B}$, alors $\chi_f = \chi_A$.

Lemme 5 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on pose $P(x) = \det(A + xB)$.
La fonction P ainsi définie est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\deg(P) \leq n$.

Preuve (du lemme)
Procédons par récurrence. Le résultat est immédiat pour $n = 1$ et $n = 2$.
Soit $n \geq 2$, fixé. Supposons le lemme vrai pour les matrices de taille $n - 1$ et considérons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et $M = (m_{ij}) = (a_{ij} + xb_{ij})$.
Pour tout couple (i, j) on notera A_{ij} (resp. B_{ij} ou M_{ij}) la matrice obtenue en barrant dans A (resp. dans B ou M) la i-ème ligne et la j-ème colonne.
Développons le déterminant $\text{Det}(A + xB)$ par rapport à la première colonne :

$$\text{Det}(M) = P(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+1)} (a_{i1} + xb_{i1}) \times \text{ Det}(A_{i1} + xB_{i1}).$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que P est une fonction polynomiale et $\deg(P) \leq n$.

Preuve (du théorème) Le deuxième item du théorème est une conséquence immediate du premier item.
Le 1er item du théorème est une conséquence immédiate du lemme.
Le 3e item à faire en cours...

Théorème 6 (Expression du polynome caracteristique. (dem))
• Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n et vérifie :

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \text{det}(A)$$

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est de degré n et vérifie :

$$\chi_f(X) = X^n - \text{tr}(f)X^{n-1} + ... + (-1)^n \text{det}(f)$$

Preuve Le deuxième item du théorème est une conséquence immédiate du premier car, si A est la matrice de f dans une base , alors $\chi_f = \chi_A$, $\text{Tr}(f)$ =$\text{Tr}(A)$ et $\det(f) = \det(A)$.

Le coefficient constant d'un polynôme P est égal à $P(0)$. Donc $\chi_A(x) = \text{Det}(0I_n - A) = (-1)^n \text{Det}(A)$.
Pour montrer le théorème, il nous reste à nous intéresser aux deux termes de plus hauts degrés de χ_A.
Posons : H'_n : « Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + a_0$ »
La proposition H'_n est évidente pour $n = 1$ ou $n = 2$, il suffit d'expliciter le déterminant.
On suppose H'_{n-1} vrai pour $n \geq 3$ fixé. On écrit le déterminant pour une matrice de taille n :

$$\text{Det}(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} \cdots & -a_{2i} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a_{i1} & \cdots & x - a_{ii} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

De même que précédemment, on note $M = xI_n - A$, M_{ij} la matrice obtenue en barrant dans la matrice M la i-ème ligne et la j-ème colonne, et A_{ij} la matrice obtenue en barrant dans la matrice A la i-ème ligne et la j-ème colonne
On développe $\text{Det}(xI_n - A)$ par rapport à la première colonne et on a :

$$\det(xI_n - a) = (x - a_{11}) \times \text{ Det}(M_{11}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{(i+1)} (-a_{i1}) \times \text{ Det}(M_{i1}).$$

La matrice M_{11} est une matrice de taille $n - 1$, et $M_{11} = xI_{n-1} - A_{11}$.
On peut donc utiliser H'_{n-1} appliqué à la matrice A_{11} et l'on pbtient :

$$\text{Det}(M_{11}) = \chi_{A_{11}}(x) = x^{n-1} - tr(A)x^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} det(A_{11}).$$

Pour $i \geq 2$, on constate que la première ligne de $\text{Det}(M_{i1})$ ne contient que des coefficients constants (indépendants de x). On développe alors $\text{Det}(M_{i1})$ par rapport à la première ligne, et en appliquant le lemme, on en déduit que $\text{Det}(M_{i1})$ est une fonction polynomiale de degré inférieure ou égal à $n - 2$ (calcul à expliciter...).
Ainsi : $\det(xI_n - a) = (x - a_{11}) \times \left(x^{n-1} - tr(A)x^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} det(A_{11})\right) + Q(x)$ où $\deg(Q) \leq n - 2$.
On peut alors conclure en examinant les termes de plus hauts degrés...

IV.2 Propriétés

Proposition 9 (Valeurs propres et polynome caractéristique. (dem)) On suppose E de dimension finie.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de E sont les racines de son polynome caractéristique.
Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynome caractéristique.

Remarque 4 On retrouve le fait qu'un endomorphisme d'un espace de dimension n (resp. une matrice carrée de taille n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple 7 Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Proposition 10 (Matrices semblables et polynome caractéristique. (dem))
Si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont le même polynome caractéristique.
La réciproque est fausse.

Proposition 11 (Polynome caractéristique d'une matrice triangulaire)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont notés $d_1, d_2, ...d_n$. On a alors :

$$\chi_A(X) = (X - d_1)(X - d_2).....(X - d_n)$$

Dans le cas d'une matrice triangulaire, il est donc **inutile** de faire le moindre calcul pour en connaître le spectre !

Proposition 12 (Polynome caractéristique et matrice transposée. (dem))
Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynome caractéristique.
Conséquence : une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

Proposition 13 (Polynome caractéristique d'une matrice par blocs. (dem))
Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, avec $\begin{cases} A \in M_p(\mathbb{K}), \\ B \in M_q(\mathbb{K}) \\ C \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \end{cases}$.
Alors $\chi_M = \chi_A \times \chi_B$

Théorème 7 (Théorème de Cayley-Hamilton)

- Soit E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le polynome caractéristique de f annule f.
  Autrement dit : si $P = \chi_f$ alors $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Le polynome caractéristique de A annule la matrice A.
  Autrement dit : si $P = \chi_A$ alors $P(A) = 0$.

Demonstration non exigible.

Exemple 8 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que u est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$

IV.3 Ordre de multiplicité des racines du polynôme caractéristique

Définition 4
1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A son polynôme caractéristique et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
   On appelle **ordre de multiplicité de** λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_A.
2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, χ_f son polynôme caractéristique et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
   On appelle **ordre de multiplicité de** λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_f.

Proposition 14 (Matrice réelle et valeur propre complexe(dem))
Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On suppose que A admet une valeur propre λ complexe, non réelle. Alors le conjugué $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A avec le même ordre de multiplicité que λ.

Exemple 9 Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer les valeurs propres de A ainsi que leurs ordres de multiplicité.
Calculer ensuite la dimension des sous-espaces propres.

Théorème 8 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $V(\lambda)$ le sous-espace propre associé et m_λ l'ordre de multiplicité de λ.

$$\text{Alors : } 1 \leq \dim(V(\lambda)) \ \leq \ m_\lambda \ \leq \ n.$$

Preuve Posons d =dim($V(\lambda)$). On prend $e_1, ..., e_{d_\lambda}$ une base de $V(\lambda)$) et l'on complète cette base en une base de E. La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Donc $\chi_f(x) = \det\left(\begin{pmatrix} (x-\lambda)I_{d_\lambda} & -B \\ 0 & xI_{n-d} - C \end{pmatrix}\right)$. On développe successivement le déterminant χ_A par raport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième etc et l'on obtient : $\chi_f(x) = (x-\lambda)^d \times \det(xI_{n-d} - C)$. Donc $d \leq m_\lambda$ (car on a $(x-\lambda)^d$ en facteur, et il est possible que λ soit aussi racine de $\det(xI_{n-d} - C)$).
L'inégalité $m_\lambda \leq n$ est immédiate car le polynôme caractéristique est de degré n.
Enfin, comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre associé n'est pas trivial et sa dimension vaut au moins 1.

Théorème 9 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $V(\lambda)$ le sous-espace propre associé, m_λ l'ordre de multiplicité de λ.

$$\text{Alors : } 1 \leq \dim(V(\lambda)) \ \leq \ m_\lambda \ \leq \ n.$$

Remarque 5 On en déduit que : si λ est une valeur propre de multiplicité 1 de f (resp. de A), alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Remarque 6 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité.

V Diagonalisation des matrices et des endomorphismes

V.1 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

Définition 5

- On dit que f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Un telle base est alors appelée une **base de diagonalisation de** f.
  Diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base de diagonalisation pour cet endomorphisme.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) lorsque A est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
  Diagonaliser une matrice, c'est trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exemple 10 Donner des exemples d'endomorphismes diagonalisables.
Donner des exemples de matrices diagonalisables.

Proposition 15 f est diagonalisable $\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une base de } E \text{ formée de} \\ \text{vecteurs propres de } f. \end{array} \right\}$

Proposition 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ une telle base (avec $AX_i = \lambda_i X_i$) et soit P la matrice dont les colonnes sont $X_1, ..., X_n$, alors

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$$

Proposition 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, rapporté à une base B.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base B alors :

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ est diagonalisable.}$$

Remarque 7 Soit A une matrice réelle. Il peut arriver que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne le soit pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple si le spectre de A est vide dans $\mathbb{R}$ (voir remarque 3, page 4) .

Proposition 18 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables. (dem))
Soit f un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) f est diagonalisable.

(b) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

(c) E est somme directe des sous-espaces propres de f : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$

(d) $\dim(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f))$

(e) χ_f est **scindé** et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Proposition 19 Si f a n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Remarque 8 Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) est scindé à racines simples, alors cet endomorphisme (resp. matrice) est diagonalisable.

A vous de jouer : Quelles propositions portant sur les matrices peut-on formuler en appliquant les propositions 18 et 19 ? (voir page 8)

Exemple 11

1. Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; f est-il diagonalisable ?
2. Même question avec la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Même question avec les matrice suivantes : $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 12 ♡ Que dire d'un endomorphisme diagonalisable, qui admet une seule valeur propre λ ?
Que dire d'une matrice diagonalisable, qui admet une seule valeur propre λ ?

Exemple 13 ♡ Soit A la matrice carrée de taille $n \geq 2$ ne contenant que des 1.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
On précisera les dimensions des sous-espaces propres et on en donnera des bases.
Enfin : la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exemple 14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre. (NB : il y a deux valeurs propres). Diagonaliser A si c'est possible (en le justifiant).

Exemple 15 1. Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant 1 pour SEULE valeur propre ?
♡ Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable admettant une unique valeur propre λ ?
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?
et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. Donner un exemple de matrice
   (a) diagonalisable et inversible,
   (b) diagonalisable et non inversible,
   (c) non diagonalisable et inversible,
   (d) non diagonalisable et non inversible.

V.2 En pratique : diagonaliser une matrice ou un endomorphisme....

Pour diagonaliser une matrice, on cherche les valeurs propres, puis une base de chaque sous-espace propre. La matrice sera diagonalisable SSI chaque SEP a pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre considérée.
Ou encore : on sait que la matrice sera diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme f canoniquement associé est diagonalisable, c'est à dire si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres vaut E, ce qui revient à dire que la somme des dimensions vaut n.
En prenant la réunion des bases des sous-espaces propres, on obtient une base de diagonalisation de f, donc une matrice P telle que $P^{-1}MP = D$ (la matrice P étant la matrice de passage de la base canonique vers la base de diagonalisation).
Concrètement, les éléments de cette base de diagonalisation sera représentés par des matrices colonnes $X_1, ..., X_n$ et l'on aura $P = (X_1 ... X_n)$.

Exemple 16 Etudier si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser.

Exemple 17 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exemple 18 Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & d \\ 0 & a & e \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable.}$$

V.3 Diagonalisabilité et polynomes annulateurs

Théorème 10 (admis)
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynome annulateur scindé à racines simples.

Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynome annulateur scindé à racines simples.

Exemple 19 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.
Peut-on affirmer que f est diagonalisable ?

Proposition 20 (Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable. (dem))
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Proposition 21
- Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ comme polynome annulateur.
- Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si elle admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ comme polynome annulateur.

VI Trigonalisation

VI.1 Introduction : définition, propriétés

Définition 6
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire. Une telle base est alors appelée **base de trigonalisation de** f.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** lorsqu'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui soit semblable à A, c'est à dire qu'il existe $P \in G\ell_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$.

Remarque 9
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux phrases suivantes sont équivalentes :
   - Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
   - Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux phrases suivantes sont équivalentes :
   - A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
   - A est semblable à une matrice triangulaire inférieure.
3. Une matrice diagonalisable est *a fortiori* trigonalisable. Idem pour les endomorphismes...
4. Une matrice est trigonalisable si c'est la matrice d'un certain endomorphisme trigonalisable.
5. Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit trigonalisable. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$. Alors le polynôme caractérisque vaut $\chi_f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - t_{ii})$ et il est donc scindé. Nous admettrons la réciproque.
   De même : si A est trigonalisable, on montre sans peine que son polynôme caractéristique est scindé. Nous admettrons la réciproque.

Théorème 11 (admis)
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
   En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable (dans $\mathbb{C}$).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
   En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}),\ P^{-1}AP = T \text{ où } T \text{ est triangulaire supérieure}$$

Remarque 10 Une matrice peut être trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ne pas l'être dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: par exemple si le polynôme caractéristique de A admet des racines complexes non réelles.

Proposition 22
1. Soit f un endomorphisme trigonalisable d'une espace vectoriel E. On suppose que Sp(f)=$\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ et m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i. Alors :
   - det(f)=
   - Tr(f)=
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. On suppose que Sp(A)=$\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ et m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i. Alors :
   - det(A)=
   - Tr(A)=

VI.2 Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre simple et une valeur propre double

On suppose que A admet une valeur propre simple α et une valeur propre double β.

- On détermine un vecteur propre associé à la valeur propre α.
- On détermine un vecteur propre X_2 associé à la valeur propre β.
- Comme X_1 et X_2 sont associés à des valeurs propres différentes, ils forment une famille libre. On complète en une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathbb{K}^3$
- Il existe des scalaires a, b, c tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + cX_3$.
- On appelle P la matrice dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3.

  ⋆ Première méthode : On a alors : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

  Le calcul du polynôme caractéristique de A nous montre que $c = \beta$. Il faut donc seulement chercher a et b tels que $AX_3 = aX_1 + bX_2 + \beta X_3$.

  - Au lieu de prendre X_3« au hasard », on peut imposer que AX_3 soit combinaison linéaire de X_2 et X_3 (c'est à dire $a = 0$). Cela nous donnera alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

    Si cela doit doit vous faciliter les calculs par la suite, l'énoncé devrait vous le suggérer.

  ⋆ Deuxième méthode : : On a $P^{-1}AP = T \iff AP = PT$ et donc la troisième colonne de AP est égale à la troisième colonne de PT.

  Or la troisième colonne de PT est égale à $P(T)_3$ où $(T)_3$ est la troisième colonne de T.

  On écrit donc a priori la 3e colonne de T : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

  Puis on cherche a, b et c tels que $A(P)_3 = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple 20 Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (est-elle diagonalisable ?)

VI.3 Comment trigonaliser une matrice 3×3 (non diagonalisable) admettant une valeur propre triple λ et dont l'espace propre est de dimension 2

Comme l'espace propre est de dimension 2, on peut en trouver une base (X_1,X_2). On complète en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ en prenant n'importe quel X_3 qui n'est pas combinaison linéaire de X_1 et X_2.
On a donc : $AX_1 = \lambda X_1$, $AX_2 = \lambda X_2$.
Il ne reste qu'à calculer a, b, c tels que $AX_3 = aX_1+bX_2+cX_3$ (c'est possible car (X_1, X_2X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$).
En posant $P = [X_1|X_2|X_3]$, on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
En fait, en regardant cette matrice, on se rend compte que l'on aura nécessairement $c = \lambda$ (il suffit de regarder le polynôme caractéristique).

VII Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation

1. Calcul des puissances n-ièmes d'une matrice
   si $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ alors par récurrence on a :
   $$A^k = PD^kP^{-1} = P \times \text{Diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)P^{-1}$$

2. Suites satisfaisant une récurrence linéaire simultanée (ou croisée)
   Exemple : On pose $u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit
   $$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{4} \quad (2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3} \quad (u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4} \quad (u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$
   Calculer $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de n. Etudier la convergence de ces trois suites.
   On note $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   On a alors $X_{n+1} = AX_n$ puis par récurrence : $X_n = A^nX_0$. On est donc ramené au calcul de la puissance $n$ème de A.
   Calcul du polynôme caractéristique : $\chi_A(x) = ... = (x-1)(x-(1/12))(x-(1/4))$. Comme A a 3 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.
   Après calcul, on obtient comme matrice de diagonalisation : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   Puis $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   D'où $\forall n,\ X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 = ...$ et enfin
   $u_n = 14 - 11 * 4^{-n} - 3 * 12^{-n},\ , v_n = 14 + 8 * 12^{-n},\ w_n = 14 + 11 * 4^{-n} - 3 * 12^{-n}$.
   Les 3 suites convergent vers 14.
   On peut imaginer des exemples plus subtils, par exemple en laissant u_0, v_0, w_0 en paramètres et en demandant pour quelles valeurs de ces paramètres les suites convergent...

3. Etude de suites satisfaisant une récurrence linéaire à coefficients constants.
   Pour les suites satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre 2, on a des formules.

   Exemple 21 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -6u_n - 11u_{n+1} - 6u_{n+2} \end{cases}$

   On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors la récurrence s'écrit : $X_{n+1} = AX_n$ avec $A =$.

   Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

   Exemple 22 Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_n - 8u_{n+1} + 5u_{n+2} \end{cases}$

   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ avec $A =$

   Le calcul du polynôme caractéristique donne : $\chi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$.
   Un calcul rapide donneE_2 =vect(U) où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et E_1=vect(V) où $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

4. La diagonalisation/trigonalisation peut servir pour résoudre des systèmes d'équations différentielles (mais ce n'est plus à votre programme).

VIII Bilan (partiel) outils

Faites attention à la question posée ! Parfois on voit des étudiants faire de longs calculs inutiles....
Faites attention : certaines conditions sont des **conditions suffisantes**, d'autres sont **nécessaires et suffisantes**.
Je fais ici un petit recueil des outils pour les matrices. Il y a les mêmes pour les endomorphismes.

- **Outils pour trouver le spectre de A**
  - ⋆ Voir si il n'y a pas des valeurs propres « évidentes »ou suggérées par l'énoncé.
  - ⋆ Voir si une des colonnes de A est nulle.
  - ⋆ Si la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux
  - ⋆ Calculer le polynôme caractéristique.
  - ⋆ Si on connait un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont nécessairement racines de ce polynôme.
  - ⋆ La trace de A est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité). Utilisable si on connaît déjà des valeurs propres de A

- **Outils pour savoir si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f de E, de dimension n) est diagonalisable.**
  - ⋆ Si A a n valeurs propres **distinctes**, alors A est diagonalisable.
  - ⋆ Si χ_A est scindé à racines simples , alors A est diagonalisable.
  - ⋆ Si A est semblable à une matrice diagonalisable, elle est diagonalisable.
  - ⋆ A diagonalisable $\iff$ la somme des dimensions des SEP vaut n.
  - ⋆ f diagonalisable $\iff$ la somme des SEP vaut E.
  - ⋆ A est diagonalisable $\iff$ il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que : P est scindé à racines simples et $P(A) = 0$.
  - ⋆ A est diagonalisable $\iff \left(P(A) = 0 \text{ avec } P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) \right) \iff \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0 \right)$
  - ⋆ A est diagonalisable $\iff \left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé} \\ \text{et pour toute valeur propre de } A \\ \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A - \lambda I_n\right)\right) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{array} \right\}$

- **Outils pour diagonaliser une matrice** : trouver les valeurs propres de A puis chercher les sous-espaces propres.

- **Outils pour savoir si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f de E, de dimension n) est trigonalisable.**
  - ⋆ Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
  - ⋆ Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
- **Outils pour trigonaliser une matrice** : savoir travailler sur les cas indiqués dans le paragraphe correspondant. Si c'est plus compliqué, l'exercice comportera une indication.