Lycée Aristide Briand, PC, 2025/2026 **Programme de la semaine n°10, Du 01/12 au 05/12 2025**

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Déterminants**
   (a) Revoir le programme de PCSI. Pour rappel, il est en ligne sur cahier-de-prepa.fr, ainsi que le poly de cours.
   (b) **Compléments** : Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, déterminant de Vandermonde et lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.
2. **Réduction des endomorphismes et des matrices carrées**
   (a) **Éléments propres.**
   Droite stable par un endomorphisme.
   Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.
   Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
   Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v. En particulier, le noyau de u est stable par v.
   Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. Notation $\mathrm{Sp}(u)$.
   La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
   Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
   Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
   Les valeurs propres d'un endomorphisme f d'un espace de dimension finie sont les racines de $\lambda \mapsto \mathrm{Det}(f - \lambda Id)$.
   Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Recherche des valeurs propres à l'aide de $\mathrm{Det}(A - \lambda I_n)$.
   Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
   (b) **Polynôme caractéristique.** Polynôme caractéristique d'une matrice carrée ($chi_A(x)$ =det($xI_n - A$)), d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (χ_u=det($xId_E - f$). Il est unitaire, de degré n =dim(E). Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
   Spectre complexe d'une matrice carrée réelle. Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.
   Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
   Théorème de Cayley-Hamilton. (La démonstration n'est pas exigible.)
   (c) **Diagonalisation en dimension finie**
   Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
   Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.
   Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
   Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
   Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Exemple des projecteurs et des symétries.
   Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Traduction matricielle.
   Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité. Traduction matricielle.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Déterminants de Vandermonde : énoncé et démonstration
- Etre capable de donner la définition et les propriétés fondamentales du déterminant d'une matrice
- Déterminant d'un endomorphisme (théorème permettant la définition, énoncé+dém.)
- (démo) Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- (démo) p vecteurs propres de f associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ forment une famille libre.
- (démo) Les sous-espaces propres sont en somme directe
- (démo) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit P un polynome. Soit x un vecteur de E tel que $f(x) = \lambda x$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x)$. Ainsi : Si P est un polynome annulateur de f et si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de P.