Suites et séries de fonctions

Table des matières

I Suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple) Soit I un intervalle non vide.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et soit f une fonction elle aussi définie sur I.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur I lorsque :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

***Exemple* 1** $\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

***Exemple* 2** $\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} \forall x \in \left[0; \frac{1}{n}\right[& f_n(x) = 1 - nx \\ \forall x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right] & f_n(x) = 0 \end{cases}$

***Exemple* 3** $\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} f_n(x) = 2n^2x \quad si \quad x \in \left[0; \frac{1}{2n}\right[\\ f_n(x) = 2n - 2n^2x \quad si \quad x \in \left[\frac{1}{2n}; \frac{1}{n}\right[\\ f_n(x) = 0 \quad si \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$

I.2 Convergence uniforme

I.2.a Norme

Définition 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit N une application de E dans $\mathbb{R}^+$.
On dit que N est une norme lorsque :

1. $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ N(\overrightarrow{u}) = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda\overrightarrow{u}) = |\lambda| N(\overrightarrow{u})$
3. $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \in E^2,\ N(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \leq N(\overrightarrow{u}) + N(\overrightarrow{w})$ (inégalité triangulaire).

***Exemple* 4** $N : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & N(u) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$ (norme euclidienne).

Proposition 1 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit E l'espace des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de plus bornées.
  Alors E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'application $\|.\|_\infty \ : \ f \to \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I}\{|f(x)|\}$ est une norme.

Remarque 1 On note aussi $\|f\|_\infty = \sup\limits_I |f|$

Définition 3 L'application $\|.\|_\infty$ est appelée **norme uniforme** sur l'espace des fonctions bornées sur I

I.2.b Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 4 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit $f\ :\ I \to \mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f sur I lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

***Exemple* 5** $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1]\ f_n(x) = x^n(1-x)^n$

Proposition 2 (Lien entre convergence simple et convergence uniforme.)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction elle aussi définie sur I.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge aussi simplement vers f.
La réciproque est fausse.

I.3 Continuité d'une limite uniforme

Proposition 3 (Continuité d'une limite uniforme (dem).)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I .
On suppose que :
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f.
- toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

Alors la fonction f est continue sur I.

***Exemple* 6** $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{1}{1+(x-n)^2}$
Montrer que la convergence sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniforme, mais que la convergence sur tout segment $[a;b]$ est uniforme. Quelle conclusion sur la continuité ?

Proposition 4 (Continuité d'une limite uniforme, version sur tout segment.) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I .
On suppose que :
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subset I$ vers une fonction f.
- toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

Alors la fonction f est continue sur I.

I.4 Intégration et passage à la limite : cas d'un segment

***Exemple* 7** On reprend l'exemple 3 : $\begin{cases} f_n(x)=2n^2x \quad si \quad x\in[0;\frac{1}{2n}[\\ f_n(x)=2n-2n^2x \quad si \quad x\in[\frac{1}{2n};\frac{1}{n}[\\ f_n(x)=0 \quad si \quad x\in[\frac{1}{n},1] \end{cases}$

Comparer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Conclusion ?

Proposition 5 (Intégrale d'une limite uniforme sur un segment (dem).)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$.
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

I.5 Dérivation

Proposition 6 (Dérivabilité de la limite (dem).)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I
On suppose que :
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
- La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>uniformément</u> vers une fonction h

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée est $f'=h$.
De plus, la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.

La conclusion reste valable si la convergence de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment $[a,b]\subset I$.

Proposition 7 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I. On suppose que :
- Pour tout entier $k\in\{0,1,...,p-1\}$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement .
- La suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\boxed{\textbf{uniformément}}$ (sur tout segment inclus dans I).

Alors la fonction f (limite simple des f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout entier $k\in\{0,1,...,p\}$ on a

$$f^{(k)}=\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}$$

II Séries de fonctions

II.1 Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Définition 5 (Convergence simple d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S lorsque :

pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge vers $S(x)$.

***Exemple* 8** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1;1[$, $f_n(x) = x^n$. Convergence simple de $\sum f_n$?
***Exemple* 9** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Convergence simple de $\sum f_n$?

Définition 6 (Convergence uniforme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction S lorsque :

la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S

***Exemple* 10** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. Convergence uniforme de $\sum f_n$?
***Exemple* 11** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1;1[$, $f_n(x) = x^n$. Convergence uniforme de $\sum f_n$?

Proposition 8 (Lien entre convergence simple et convergence uniforme (dem).)
Si une série de fonctions converge uniformément vers une fonction S, alors elle converge simplement vers S.
La réciproque est fausse.

Définition 7 (Convergence normale)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et bornées sur un intervalle I
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement vers la fonction S lorsque :

la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

***Exemple* 12** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Convergence normale de $\sum f_n$?
***Exemple* 13** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Convergence normale de $\sum f_n$?

Proposition 9 (Lien entre convergence normale et convergence uniforme (dem).)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.
Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément vers une fonction S.
La réciproque est fausse.

II.2 Continuité d'une série de fonction

***Exemple* 14** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.
Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S. La fonction S est-elle continue sur $[0,1]$?

Proposition 10 (Continuité de la somme d'une série de fonctions (dem).)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que :
- Chaque fonction f_n est continue sur I.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Alors la somme S de la série de fonctions est continue sur I

***Exemple* 15** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n^2}$.

Proposition 11 Continuité de la somme d'une série de fonctions, version convergence uniforme sur tout segment
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que :
- Chaque fonction f_n est continue sur I.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors la somme S de la série de fonctions est continue sur I

***Exemple* 16** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement. On note S sa somme. La fonction S est-elle continue sur $]0;+\infty[$?

II.3 Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment

Proposition 12 (Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment(dem).)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions **continues** sur un segment $[a;b]$ (*i.e.* chaque fonction f_n est continue sur I).
Si la série de fonctions converge **uniformément** vers une fonction S, alors :
- La série numérique $\sum(\int_a^b f_n)$ converge.
- Et on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt$

***Exemple* 17** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0;1], f_n(x) = \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ et $f_n(0) = 0$. Illustrer le résultat précédent avec $\sum f_n$.

II.4 Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Proposition 13 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions (dem).)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge **simplement** vers une fonction S sur I.
- La série de fonctions $\sum f'_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée S' vaut $S' = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$

Proposition 14 (Extensions aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :
- Pour tout entier $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S sur I.
- La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$ sa dérivée d'ordre k $S^{(k)}$ vaut

$$S^{(k)} = (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$$

***Exemple* 18** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement. On note S sa somme.
Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de la dérivée d'ordre k sous la forme d'une série.

II.5 Theorème de la double limite

Théorème 1 (Théorème de la double limite (admis)) Supposons que :

- une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I
- pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie),

Alors sous ces hypothèses :

- la série $\sum \ell_n$ converge,
- la somme de la série admet une limite en a
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Autrement dit, sous réserve de convergence uniforme sur I, $\displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

***Exemple* 19** La convergence uniforme sur l'intervalle $[2, +\infty[$ permet grâce à ce théorème de calculer la limite en $+\infty$ de la fonction zêta : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.

Il permet aussi de prouver que la convergence de cette même série ne peut être uniforme sur un intervalle de la forme $]1, \alpha]$ avec $\alpha > 1$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$. S'il y avait convergence uniforme, la série $\sum \frac{1}{n}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.