## Partie 1 : Exercices pour les TD

**Exercice 1** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \exp(\dfrac{(n-1)x}{n})$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 2** Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

**Exercice 3** Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

**Exercice 4** Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $]0,1]$ par :

$$f_n(x) = \min(n, \frac{1}{x})$$

**Exercice 5** Etudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = nx^n(1-x)$$

Préciser la convergence uniforme sur les segments de la forme $[0;a]$ avec $0 < a < 1$.

**Exercice 6** On définit une suite de fonctions $(f_n)$ par :

$$\forall x \in [0;2],\ f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;2],\ f_{n+1}(x) = \sqrt{2+f_n(x)}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions.
2. Démontrer que chaque fonction $f_n$ est croissante, puis étudier la convergence uniforme.

**Exercice 7** (Suite de fonctions et dérivation)

Pour tout entier $n$ non nul, et pour tout réel $x$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$.
Etudier la convergence uniforme de $(f_n)$ .

Les fonctions $(f_n)$ sont-elles dérivables ? A-t-on la convergence de la suite des $(f'_n)$ ?

**Exercice 8** Pour $x \in [0;1]$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$

1. Déterminer $f$ la limite simple de $(f_n)$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)$.
3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ ; puis comparer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

**Exercice 9** Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2-nx+n^2}$.
Etudier le type de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

**Exercice 10** Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n \colon t \mapsto 1/(1+(nt)^2)$.
Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

**Exercice 11** Montrer que $S \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $]0, +\infty[$.

L'application $S$ est-elle continue ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?

**Exercice 12** On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $D$ de la somme de la série de terme général $f_n$.
2. (a) Etudier les variations de la fonction $f_n$ pour $n$ fixé.
   (b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
   (c) Calculer la somme $S \colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ (Indication : on pourra remarquer que $f_n$ est la dérivée de la fonction $g_n$ définie par $g_n(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-nx^2}$).
3. La somme $S$ est-elle continue sur $D$ ?

**Exercice 13** L'objectif de cet exercice est de calculer $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$ et $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$.

1. On pose $g_x(t) = \frac{x}{t^{x+1}}$, pour $x > 0$. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_x(n)$.
   Justifier que la fonction $g_x$ est décroissante.
   Utiliser une comparaison série intégrale pour calculer $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$.
2. On pose $u_n(x) = \frac{x}{n^{x+1}}$ pour $x > 0$.
   Pour $n$ fixé, étudier les variations de la fonction $(x \mapsto u_n(x))$.
   Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ fixé. Penser à un théorème du cours et calculer $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^{x+1}}$.

**Exercice 14**

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, existence et calcul de $I(p, q) = \int_0^1 x^p (\ln(x))^q dx$.
   **Indication** : pour le calcul, on pourra montrer que : $I(p, q + 1) = -\frac{q+1}{p+1} \times I(p, q)$ puis en déduire $I(p, q)$ en fonction de $I(p, 0)$ puis ...
2. Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

**Exercice 15**

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Montrer que $f'(x) - f(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}}$.
   (c) Chercher la limite de $f$ en $+\infty$ (indication : on pourra penser au théorème de la double limite).
   (d) En déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

## Partie 2 : Exercices d'oral

**Exercice 16**

1. Soit $X$ un ensemble, $(g_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbb{C}$ et $g$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur $X$ de la suite de fonctions $(g_n)$ vers la fonction $g$.
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$ ?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$ ?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$ ?

**Exercice 17**

On pose $f_n(x) = \left(x^2 + 1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} \mathrm{d}x$.

**Exercice 18**

1. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f$, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue en $x_0$, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que $f$ est continue en $x_0$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$ ?

## Exercice 19

1. Soit $a$ et $b$ deux réels donnés avec $a < b$. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f$, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

## Exercice 20

On considère la série de fonctions de terme général $u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que $S$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

## Exercice 21

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)$ une suite de fonctions de $A$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication suivante :

$$\left(\text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right) \Rightarrow (\text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$ ? Justifier.

## Exercice 22

On considère, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$ ? sur $[a,+\infty[$ ?
(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$ ?
2. Prouver que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.