Lycée Aristide Briand, PC, 2025/2026 **Programme de la semaine n°11, Du 8/12 au 12/12 2025**

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Déterminants : Voir le programme précédents**
2. **Réduction des endomorphismes et des matrices carrées**

   (a) **Éléments propres.** Voir le programme précédent

   (b) **Polynôme caractéristique.** Voir le programme précédent

   (c) **Diagonalisation en dimension finie Voir le programme précédent et ajouter ce qui suit :**
   Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

   (d) **Diagonalisabilité et polynômes annulateurs**
   Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (la démonstration n'est pas exigible). Traduction matricielle.
   L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.
   Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.

   (e) **Trigonalisation en dimension finie** Définitions d'un endomorphisme trigonalisable, et d'une matrice carrée trigonalisable.
   Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable (ou d'une matrice trigonalisable) à l'aide des valeurs propres.
   Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (dém. non exigible).
   Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Déterminants de Vandermonde : énoncé et démonstration
- Etre capable de donner la définition et les propriétés fondamentales du déterminant d'une matrice
- Déterminant d'un endomorphisme (théorème permettant la définition, énoncé+dém.)
- (démo) Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- (démo) p vecteurs propres de f associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ forment une famille libre.
- (démo) Les sous-espaces propres sont en somme directe
- (démo) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit P un polynome. Soit x un vecteur de E tel que $f(x) = \lambda x$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x)$. Ainsi : Si P est un polynome annulateur de f et si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de P.
- Multiplicité d'une valeur propre et dimension d'un sous-espace propre (dem)
- Théorème de Cayley Hamilton (enoncé)
- Diagonalisation et polynome annulateur (énoncé)
- Caractérisation des endomorphismes trigonalisables (énoncé)