Introduction. Nous avons déjà rencontré la série géométrique :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1, \sum_{n\geq 0} z^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

On s'intéresse dans ce chapitre à des séries $\sum a_n z^n$ dépendant de $z \in \mathbb{C}$. De même que pour la série géométrique, on énoncera une condition portant sur $|z|$ pour affirmer que la série converge.

Les objectifs essentiels de ce chapitre sont les suivants :

1. Une série entière étant donnée, déterminer (si possible) l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge et étudier ensuite l'application $(z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)$ (on se restreindra souvent à la restriction de cette fonction à $\mathbb{R}$).
2. Une application f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ étant donnée, existe-t-il une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans une certaine partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

I Convergence d'une série entière

I.1 Introduction

Définition 1 Soit (a_n) une suite de nombres complexes.
On appelle **série entière** associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$.
En pratique, on la note (abusivement) $\sum a_n z^n$.

Exemple 1
- La série $\sum z^n$ est une série entière. Elle converge si et seulement si $|z| < 1$.
- La série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière. Montrer qu'elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- On considère que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ est une série entière, avec $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$.
  Montrer que cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

I.2 Rayon de convergence, disque de convergence

Théorème 1 Lemme d'Abel. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Conséquence : L'ensemble $I = \{r \geqslant 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 2 Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $I = \{r \geqslant 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
- Si I est majoré, alors I possède une borne supérieure $R \in \mathbb{R}$.
- Si I n'est pas majoré, on pose $R = +\infty$.

R est alors appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de I dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} = [0; +\infty]$.

$$R = \sup\{r \geqslant 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

N.B. : $I \neq \emptyset$ car $0 \in E$ et c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Théorème 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- $R = 0 \iff$ la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
- Si $R > 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $R \neq +\infty$, alors pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente et $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
- $R = +\infty \iff$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R et soit

$$D = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tels que } |z| < R\}. \qquad (\text{Si } R = +\infty,\ \text{alors } D = \mathbb{C}.)$$

L'ensemble D est appelé disque ouvert de convergence de la série entière.
L'intervalle ouvert $]-R, R[\subset \mathbb{R}$ est appelé l'intervalle ouvert réel de convergence.

Remarque 1 Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple 2 Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum z^n$ vaut :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Le rayon de convergence de la série $\sum a^n z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série $\sum n z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série $\sum n! z^n$ vaut :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ vaut :

Exemple 3 Les exemples ci dessous illustrent le fait que, pour une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence R, le comportement de la série pour les valeurs de z telles que $|z| = R$ n'est pas déterminé par le théorème 2

- Quel est le rayon de convergence R de la série $\sum \dfrac{z^n}{3^n}$?

  Quel est le comportement de la série $\sum \dfrac{z^n}{3^n}$ lorsque $|z| = R$?

- Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$?

  Quel est le comportement de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ lorsque $z = R$? Lorsque $z = -R$?

- Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n^2}$?

  Quel est le comportement de la série $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ lorsque $|z| = R$?

I.3 Méthodes pour déterminer le rayon de convergence

Proposition 1 (Utilisation d'inégalités. dem)
On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

- **Conditions suffisantes pour que** $|z_0| \leqslant R$**.**

$$\begin{aligned}
\text{La suite } (a_n z_0^n) \text{ est bornée} &\implies |z_0| \leqslant R \\
\text{La suite } (a_n z_0^n) \text{ est convergente} &\implies |z_0| \leqslant R \\
\text{La série } \sum a_n z_0^n \quad \text{converge} &\implies |z_0| \leqslant R \\
\text{La série } \sum a_n z_0^n \quad \text{converge absolument} &\implies |z_0| \leqslant R
\end{aligned}$$

- **Conditions suffisantes pour que** $|z_0| \geqslant R$**.**

$$\begin{aligned}
\text{La suite } (a_n z_0^n) \text{ n'est pas bornée} &\implies |z_0| \geqslant R \\
\text{La suite } (a_n z_0^n) \text{ ne converge pas vers } 0 &\implies |z_0| \geqslant R \\
\text{La série } \sum a_n z_0^n \quad \text{diverge} &\implies |z_0| \geqslant R \\
\text{La série } \sum |a_n z_0^n| \quad \text{diverge} &\implies |z_0| \geqslant R
\end{aligned}$$

Remarque 2 (mnémotechnique) : Lorsque les inégalités faisant intervenir le rayon de convergence figurent en hypothèse, ce sont des inégalités strictes. En revanche, les inégalités figurant dans les conclusions sont larges....

Remarque 3 Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+$ et si la série $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z du disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tels que } |z| \leq R\}$.

Théorème 3 (Comparaison des rayons de convergences. dem)
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (à partir d'un certain rang) alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Exemple 4 Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \arctan(\frac{1}{2^n}) z^n \text{ et } \sum (\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)) x^n$$

Théorème 4 (Criière de D'Alembert pour les séries entières dem.)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, telle que $\boxed{\forall n, a_n \neq 0}$.

On suppose que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite ℓ.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ où $\ell \in]0, +\infty[$ alors
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, alors $R = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, alors $R = 0$.

Corollaire 1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1.

Exemple 5

1. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

$$\sum nz^n \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+n} z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n!}$$

2. Montrer que les séries entières de la forme $\sum Q(n)z^n$ où $Q \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$ ont toutes un rayon de convergence égal à 1.

Théorème 5 (Rayon de convergence de $\sum na_nz^n$. dem) Les séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum na_nz^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve Soit R le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$ et soit R' celui de $\sum na_nz^n$.

Pour $n \geq 1$, $|a_n| \leq n|a_n|$ donc d'après le théorème 3 : $\boxed{R' \leq R.}$

Soit z un complexe tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel s tel que $|z| < s < R$.
On écrit alors : $na_nz^n = a_ns^n \times n(\frac{z}{s})^n$. Puisque $\left|\frac{z}{s}\right| \in [0,1[$, on en déduit que $(n(\frac{z}{s})^n)$ tend vers 0. Au fait POURQUOI ?

$(n(\frac{z}{s})^n)$ tend vers 0 donc la suite $(n(\frac{z}{s})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n,\ |n(\frac{z}{s})^n| \leq M$.
Donc $|na_nz^n| = |a_ns^n \times n(\frac{z}{s})^n| \leq |a_ns^nM|$. Or $(|a_ns^n|)$ est bornée car $|s| < R$. Donc (na_nz^n) est bornée, ce qui signifie que $|z| \leq R'$.
Conclusion : $|z| < R \Rightarrow |z| \leq R'$. On en déduit que $\boxed{R \leq R'}$.

Corollaire 2 $\sum a_nz^n$ et $\sum a_n\frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Preuve D'après le théorème précédent, le rayon de convergence de $\sum a_n\frac{z^{n+1}}{n+1}$ est le même que celui de $\sum a_nz^{n+1}$ qui est le même que celui de $\sum a_nz^n$.

Exemple 6 Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes : $\sum nz^n$, $\quad \sum n2^nz^{2n}$.

II Opérations algébriques sur les séries entières

Proposition 2 Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $\lambda = 0$, le rayon de la série entière $\sum \lambda a_nz^n$ est $+\infty$.
Si $\lambda \neq 0$, le rayon de la série entière $\sum \lambda a_nz^n$ est R et de plus :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_nz^n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n$$

Proposition 3 Soient $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
On note R le rayon de convergence de $\sum(a_n+b_n)z^n$.
Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.
Si $R_a = R_b$, alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.
Dans tous les cas, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_nz^n$

Exemple 7 Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum(3^n + \frac{1}{5^n})z^n$, et sa valeur pour $|z| < R$.

Remarque 4 Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux series ainsi que le théorème sur le produits de Cauchy de deux séries.

Théorème 6 (Série produit. dem)
Soient $S = \sum a_n z^n$ et $T = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit (de Cauchy) de S et de T est la série entière $U = \sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence de la série U vérifie $R_c \geqslant min(R_a; R_b)$.

Pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a; R_b)$, on a $U(z) = S(z)T(z)$, c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \min(R_a; R_b), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Exemple 8 Illustrer le résultat précédent avec $a_n = b_n = 1$ pour tout entier n.

Exemple 9 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et soit f la fonction définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ pour } |z| < R.$$

Déterminer une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n$ en fonction de $f(z)$ lorsque $|z| < 1$.

III Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à des séries entières de la **variable réelle.**

III.1 Régularité

Théorème 7 (Convergence normale. dem) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R.
La série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment $[a;b] \subset]-R;R[$.
Conséquence : $t \mapsto \sum a_n t^n$ est continue sur $]-R;R[$.

Théorème 8 (Dérivation terme à terme. dem)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R;R[$.

De plus : $\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Et pour tout entier p, on a :

$$\forall t \in]-R;R[, \quad f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)....(n+p) a_{n+p} t^n = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n t^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier p, on a : $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$

Exemple 10 Illustrer le résultat précédent avec la série entière $\sum t^n$

Théorème 9 (Primitivation. dem) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On note $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, définie pour $t \in]-R;R[$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ est égal à R.

Pour tout réel $t \in]-R;R[$, $\quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ où F est l'unique primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.

Autrement dit : $\forall t \in]-R,R[,\ \int_0^t f(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

Preuve C'est une conséquence du théorème 8 appliqué à la série $\sum a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exemple 11 Illustrer le résultat précédent avec la série entière $\sum t^n$

Exemple 12 Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

Exemple 13 Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n2^n}$

III.2 Fonctions développables en série entière

Définition 4 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel r tel que $0 < r \leqslant R$ tel que :

$$]-r;r[\subset I \quad \text{et} \quad \forall t \in]-r;r[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Proposition 4 (Unicité du développement en série entière)
Si une fonction f, définie au voisinage de 0, est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors f est de classe C^∞ sur cet intervalle ; de plus il existe une unique série entière dont f est la somme au voisinage de 0.

Cette série est la série de Taylor de f en 0 : $\quad \forall t \in]-r;r[,\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$

Remarque 5 Attention : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'admet pas forcément de DSE, et la série de Taylor n'est pas toujours égal à la fonction.
Prenons par exemple : $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On montre par récurrence que $f^{(k)}(0) = 0$ et donc que la série de Taylor de f est la fonction nulle. Mais la fonction f n'est pas identiquement nulle. Donc la série de Taylor de f n'est pas égale à f. Par voie de conséquence, f n'est pas développable en série entière.

Définition 5 (Série entière au voisinage de a)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de a lorsque la fonction $t \to f(a+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

III.3 Developpements en série entière usuels

III.3.a Un rappel utile

Théorème 10 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-r,r[$ dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in]-r,r[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

III.3.b Développements en série entière des fonctions usuelles

Fonction	DSE(0)	Rayon	Convergence sur ...	Méthode
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$I =]-1, 1[$	connu !
$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$I =]-1, 1[$	connu !
$f(x) = \ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$	1	$I =]-1, 1]$	Intégration de $\dfrac{1}{1+x}$
$f(x) = -\ln(1-x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$I = [-1, 1[$	Intégration de $\dfrac{1}{1+x}$
$f(x) = e^x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = \mathrm{ch}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$		Somme de DSE(0)
$f(x) = \mathrm{sh}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$		Somme de DSE(0)
$f(x) = \cos(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = \sin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$		Taylor
$f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}$	$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ ou bien $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$+\infty$ $+\infty$		Formule du binôme la somme est finie....
$f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$	$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ "formule du binôme généralisé"	1	$I =]-1, 1[$	Equation différentielle
$f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$	$\displaystyle \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$			

Remarque 6 Le développement de $(1+x)^\alpha$ est souvent utilisé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$:
$\forall t \in]-1; 1[, \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = ...$

Remarque 7 Par dérivation terme à terme du DSE de $\dfrac{1}{1-t}$, on déduit ceux de $\dfrac{1}{(1-t)^2}$ etde $\dfrac{2}{(1-t)^3}$:

$$\left(\forall t \in]-1; 1[, \ \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \Longrightarrow \left(\forall t \in]-1; 1[, \ \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}\right) \Longrightarrow \left(\forall t \in]-1; 1[, \ \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}\right)$$

Etc....

III.4 Recherche du développement en série entière d'une fonction

III.4.a A l'aide des DSE(0) connus

On utilise les DSE connus et les théorèmes de **sommation**, de **dérivation** et d'**intégration** et le **produit de Cauchy** de deux séries entières.
C'est toujours possible pour une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples (éventuellement sur $\mathbb{C}$). On se retrouve avec des séries géométriques et des dérivées des séries géométriques.

Par exemple $\dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$ pour $|x|<|a|$.

Puis $\dfrac{1}{(a-x)^2} = \left(\dfrac{1}{a-x}\right)' = \ldots$

Exemple 14 Déterminer les DSE(0) des fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence de chacune des séries entières obtenues.

$$(a) f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad (b) f(x) = \mathrm{Arctan}(x) \qquad (c) f(x) = \frac{e^{-3x}-1}{x} \qquad (d) h(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Exemple 15 Déterminer le DSE(0) de la fonction suivante, en précisant son rayon de convergence :

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

Attention : réfléchir deux minutes avant de se lancer dans un calcul immonde...

Exemple 16 $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ où $z\in\mathbb{C}$; $f(z) = \dfrac{1-z^2}{1-2z\cos(\alpha)+z^2}$ où $z\in\mathbb{C}$

Exemple 17 Utilisation des théorèmes de dérivation et d'intégration.
Déterminer les DSE(0) des fonctions suivantes (préciser les rayons de convergence) :

$$(a)\ f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt \qquad (b) g(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt \qquad (c) \star\star\ h(x) = \ln(1-2x\cos(\alpha)+x^2)$$

Indication pour (c) :

III.4.b En utilisant les formules/inégalités de Taylor

Voir démarche utilisée pour les formules usuelles ! !

III.4.c Méthode de l'équation différentielle

: Prenons un exemple.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. Montrer qu'elle est développable en série entière.
On remarque que f est dérivable sur son domaine de définition et que $f'(x) = 2xf(x)+1$.
Donc f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On cherche une solution développable en série entière, donc de la forme : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La condition initiale impose :
Soit R le rayon de convergence de cette éventuelle série entière. Alors R est aussi le rayon de convergence de la série entière $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

L'équation différentielle s'écrit alors, pour $x\in]-R,R[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$.

Ce qui s'écrit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 1$.
On fait attention aux premiers termes de la série :

Par unicité du DSE en série entière, on en déduit : $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $\forall n \geq 2 : a_{n+1} =$
On en déduit que

Si $R \neq 0$, alors $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ pour $x \in]-R, R[$.
Quel est le rayon de convergence ?

Exemple 18 Détermination d'une somme à l'aide d'une équation différentielle :
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$
Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
Montrer que f vérifie l'équation différentielle suivante : $2f(x) = (1+4x)f'(x)$.
En déduire f

Exemple 19 Utilisation d'une équation différentielle pour trouver le DSE d'une fonction exprimée à l'aide des fonctions usuelles : soit $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
Justifier que f possède un développement en série entière autour de 0.
Quel est son rayon de convergence ?
Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis calculer son développement en série entière.
En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

IV Application à des calculs de sommes de séries

Evidemment, il faut très bien connaître ces formules, très utiles pour calculer notamment des sommes de séries entières en reconnaissant des expressions connues !
Par exemple $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} =$
De manière plus générale, il faut savoir reconnaître des combinaisons linéaires de séries connues, qui ont éventuellement subi quelques transformations : suppression/ajout de quelques termes initiaux, intégration terme à terme, dérivation terme à terme.

Exercice 1
1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 x^n$ puis calculer sa somme.
2. Préciser le rayon de convergence de $\sum \frac{2n}{(2n+1)!} x^n$ puis calculer sa somme
3. Justifier la convergence puis calculer la somme de la série de terme général $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 2 Série entière de la forme $\sum P(n)x^n$.
Notons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$,.....
Déterminer l'expression de la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+3n+1)x^n$.

Exercice 3 Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$. Calculer le rayon de convergence de cette série entière ; calculer $f(x)$.

V Compléments sur les séries entières complexes

V.1 Introduction

Définition 6 Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert de centre O et de rayon $R > 0$.
Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite développable en série entière sur D si il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\boxed{\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.}$

Proposition (admise) 1 (Continuité sur le disque ouvert de convergence)
Soit $S = \sum a_n z^n$ une série entière et $R > 0$ son rayon de convergence.
La fonction $z \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$

V.2 Séries complexes de référence

Série géométrique On connaît déjà la fonction $\left(z \mapsto \frac{1}{1-z}\right)$, qui est développable en série entière sur le disque unité ouvert.

Exponentielle complexe **Rappel** : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\exp(z) = e^z = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos(y) + i\sin(y))$$

Rappel : On a vu que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(y) + i\sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

Ainsi on obtient : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \cos(y) + i\sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}}$

Donc pour $z = x + iy$, on peut faire le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$.
On obtiendra $e^x \times (\cos(y) + i\sin(y))$.
Quel est le terme général de ce produit de Cauchy ?

Théorème 11 $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (le rayon de convergence étant $R = +\infty$).

Théorème 12 **Exponentielle d'une somme** : si z et z' sont deux complexes, alors

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$$