NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Réduction des endomorphismes et des matrices carrées** : voir le programme précédent. **Surtout exercices.**
2. **Suites et séries de fonctions**

   Ce chapitre a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

   Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   (a) **Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions**

   Convergence simple d'une suite de fonctions.

   Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

   Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

   Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

   La convergence normale entraîne la convergence uniforme. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

   (b) **Régularité de la limite d'une suite de fonctions**

   Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I. *En pratique,* on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

   Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

   En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

   Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.

   (c) **Régularité de la somme d'une série de fonctions**

   Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I. *En pratique,* on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

   Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. *En pratique,* on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

   Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

   (d) **Théorème de la double limite** Si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Etre capable d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité (ou des conditions seulement suffisantes)
- Etre capable d'énoncer des conditions suffisantes de diagonalisabilité.
- Théorème de Cayley Hamilton (enoncé)
- Diagonalisation et polynome annulateur (énoncé)
- Caractérisation des endomorphismes trigonalisables (énoncé)
- Continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions (dem)
- Intégration et passage à la limite pour une suite de fonctions continues sur un segment (dem)
- Défintions de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. Liens entre ces convergences (dem)
- Continuité d'une série de fonctions (dem)
- Dérivabilité d'une série de fonction et intégration. (dem)