Programme de colle. Semaine n°13 : du 05/01 au 09/01/2026.

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément.

I : Suites et séries de fonctions : voir le programme précédent

II : Séries entières

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.
Disque ouvert de convergence.
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

- si $a_n = O(b_n)$ (ou $a_n = o(b_n)$), alors $R_a \geqslant R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Unicité du développement en série entière.
Développements des fonctions usuelles. Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
Développement en série entière au voisinage de 0 : recherche du développement en série entière d'une fonction à l'aide des DSE usuels, ou à l'aide de la formule de Taylor (avec reste intégral).

III : Questions de cours

1. Continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions (dem)
2. Intégration et passage à la limite pour une suite de fonctions continues sur un segment (dem)
3. Dérivation et passage à la limite (dem)
4. Définitions de la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. lien entre ces convergences (dem)
5. Lemme d'Abel (pour les séries entières) (dem)
6. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. (dem)
7. Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. (dem)
8. Etre capable de donner les développements en séries entières usuelles, en ayant une idée de la méthode de démonstration.