Exercice 15

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Montrer que $f'(x) - f(x) = -\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
   (c) Chercher la limite de f en $+\infty$ (indication : on pourra penser au théorème de la double limite).
   (d) En déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Solution:

1. Pour $x < 0$, $\dfrac{e^{-nx}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-nx}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (th. de croissances comparées),

   donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement pour } x < 0.}$

   Pour $x > 0$, posons $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.

   Pour tout $x \geq 0$ réel et pour tout n entier, $u_n(x) \neq 0$. De plus $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = ... = e^{-x}\dfrac{n}{n+1} < 1$ donc la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et c'est une suite à termes positifs. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

   Ainsi par le théorème des séries alternées, $\boxed{\sum(-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1} \text{ converge pour } x \geq 0.}$

   $\boxed{\text{Donc le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}^+.}$

   N.B. : En fait on peut remarquer que la convergente est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

   En effet : le théorème des séries alternées, nous permet d'affirmer que $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| \dfrac{e^{-(N+1)x}}{N+2} \leq \dfrac{1}{N+2}$, donc la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Ce qui permet d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. (a) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a > 0$. Cela montrera que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Soit $a > 0$, fixé.

   $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{ne^{-nx}}{n+1}$ donc $|u_n'(x)| \leq \dfrac{ne^{-na}}{n+1}$ pour tout $x \geq a$. Ainsi $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{ne^{-na}}{n+1} \leq e^{-na}$.

   Or $\sum e^{-na}$ est une série géométrique de raison $e^{-a} \in [0,1[$ donc c'est une série convergente.

   Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge, ce qui signifie que $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

   Conclusion : $\sum u_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$ et $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. Donc $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et de plus $f' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.

   (b) $f'x) - f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n'(x) - u_n(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx}\left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)$.

   $f'(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx}$.

   On reconnaît une série géométrique de raison $(-e^{-x}) \in]-1;1[$, car $x > 0$. $\boxed{\text{Ainsi } f'x) - f(x) = \dfrac{-1}{1+e^{-x}}.}$

   (c) On va utiliser le théorème de la double limite.

   On sait que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (cf première question).

   Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-nx}(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} = 0 \text{ si } x > 0 \\ = 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

   Donc par le théorème de la double limite : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1.}$

(d) La fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du 1er ordre (d'après 2b) : $f'x) - f(x) = \dfrac{-1}{1+e^{-x}}$.

La solution générale de l'équation homogène est $(x \mapsto Ke^x)$, où $K \in \mathbb{R}$.

Ensuite la méthode de variation de la constante donne, après calcul $K'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Donc $K(x) = \ln(1+e^{-x})$.

$\boxed{\text{Donc } f(x) = \left(\ln(1+e^{-x}) + K\right) e^x, \text{ où } K \in \mathbb{R}.}$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x})e^x = 1$. Donc par unicité de la limite, $K = 0$. Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est égale à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$.
Or g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Donc f est g sont égales sur $\mathbb{R}^+$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi.
Autre possibilité : on peut conclure en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.