Programme de colle. Semaine n°14 : du 12/01 au 16/01/2026.

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément.

I : Séries entières

Reprendre le programme précédent et ajouter ce qui suit.
Développement en série entière au voisinage de 0 : rechercher du développement en série entière d'une fonction à l'aide des DSE usuels, à l'aide de la formule de Taylor, à l'aide d'une équation différentielle.
Séries exponentielle complexe.
Toute fonction définie par une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

II : Compléments sur les variables aléatoires discrètes

1) Lois usuelles
Révisions sur les variables aléatoites finies : certaine, uniforme, Bernoulli, Binomiale.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation de la loi de Poisson comme la loi des événements rares.

2) Espérance et variance
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle Variable aléatoire X à valeurs réelles d'espérance finie, espérance de X. La variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est l'espérance de X. Variable aléatoire centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.
Formule de transfert (admise) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ et si f est définie sur cet ensemble et à valeurs réelles, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas : $E\Big(f(X)\Big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.
Linéarité de l'espérance (démonstration hors programme). Positivité, croissance de l'espérance.
Si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie (démonstration hors programme).
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type : Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, XY aussi et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$. Cas d'égalité.
Variance, écart type. Notations $V(X)$, $\sigma(X)$. Variable aléatoire réduite. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle. Relation $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ (formule de Huyghens). Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

III : Questions de cours

1. Lemme d'Abel (pour les séries entières) (dem)
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. (dem)
3. Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. (dem)
4. Etre capable de donner les développements en séries entières usuelles, en ayant une idée de la méthode de démonstration.
5. Enoncé du théorème de transfert.
6. Enoncé du théorème d'antirépartition
7. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie (dem).
8. $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$ (dem).
9. Connaître sans hésitation le lois usuelles : certaine, Bernoulli, uniforme, binomiale, géométrique, Poisson (définition de la loi.
10. Connaître sans hésitation les espérances et variances de : loi certaine, loi de Bernoulli, loi binomiale.