Table des matières

I Questions de révision pour se mettre en route

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
2. Donner différents produits scalaires.
3. Qu'est-ce qu'un espace préhilbertien réel ? Qu'est-ce qu'un espace euclidien ?
4. Qu'est-ce qu'une norme ? Qu'est-ce qu'une norme euclidienne ?
5. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
6. Que signifie : « $x \perp y$ » ?
7. Qu'est-ce qu'un vecteur normé ? un vecteur unitaire ?
8. Qu'est-ce que l'orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien ? Donner $E^{\perp}$ et $\{0_E\}^{\perp}$.
9. Qu'est-ce qu'une famille orthogonale ? Qu'est-ce qu'une famille orthonormale ?
10. Une famille orthogonale peut-elle être liée ? Une famille orthonormale peut-elle être liée ?
11. Enoncer le théorème de Pythagore.
12. Qu'est-ce que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?
13. Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ la famille (u, v, w) où $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w) = (0, 1, 1)$.
14. Un espace euclidien possède-t-il toujours des bases orthonormales ?
15. Quel est l'intérêt des bases orthonormales ?
16. Qu'est-ce qu'une projection orthogonale ?
17. Soit $F =$Vect$\{(1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, où $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.
    (a) Donner l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur $u = (x, y, z)$ sur F.
    (b) Donner la distance de $v = (1, 2, 3)$ à l'espace F.

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

II Produit scalaire

II.1 Définition, exemples

Définition 1 (a) Une **forme bilinéaire** définie sur E est une application $\phi : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ linéaire par rapport à la première et à la deuxième variable, c'est à dire : pour tous vecteurs x_1, x_2, y, x, y_1, y_2 et tout réel λ, on a

$$\phi(x_1 + \lambda x_2, y) = \phi(x_1, y) + \lambda\phi(x_2, y)$$

$$\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x, y_1) + \lambda\phi(x, y_2)$$

(b) Une forme bilinéaire ϕ est **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ \phi(x, y) = \phi(y, x)$.

(c) Une forme bilinéaire ϕ est **positive** si : $\forall x \in E,\ \phi(x, x) \geq 0$.

(d) Une forme bilinéaire ϕ est **définie positive** si : elle est positive **et** : $\forall x,\ \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

(e) On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Exemple 1

1. Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$: pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, on pose : $\phi(x, y) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$
2. Produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: on pose $\langle X, Y\rangle =^t XY = X^T \cdot Y$.
   Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors : $\langle X, Y\rangle$

   En pratique, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ et l'espace des vecteurs colonnes correspondant.
3. Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b])$ où $a < b$. Soit $\varphi : (f, g) \in E^2 \mapsto +\int_a^b f(t)g(t)dt$.
4. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$. Soit $\varphi : (f, g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.
5. $E = \mathbb{R}^n$. On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs et on considère l'application φ qui à (x, y) associe $\sum_{k=1}^{n} a_i x_i y_i$ (sachant que $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$).
6. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(x, y) = 5x_1y_1 - 3x_2y_2$. Montrer, à l'aide d'un argument frappant, que φ ne définit pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
7. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la trace d'une matrice $M = [a_{ij}]$ par $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{R},\ (A, B) \to Tr(A^T \cdot B)$. Alors Φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $\Phi : \left((P, Q) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \right)$.
9. Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, on considère Φ définie par : $\Phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
10. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$ on pose $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Montrer que Φ est bien définie sur E^2, puis que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Ultra-classiques

Remarque 1 On peut définir un produit scalaire en dimension finie ou infinie.

Notations usuelles pour un produit scalaire : $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$....

Dans la suite on suppose E muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$

Définition 2 Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, de dimension quelconque, on dit que E est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un espace préhilbertien réel **de dimension finie**, dit que E est un **espace vectoriel euclidien.**

Remarque 2 Si $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E alors : $\forall x \in E,\ \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$

II.2 Propriétés du produit scalaire

Théorème 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

On a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Théorème 2 Inégalité de Minkowski (qui sera aussi l'inégalité triangulaire).

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité est réalisée si et seulement si la famille (x, y) est liée et $\langle x, y\rangle \geq 0$.

Exemple 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(c_1, \dots c_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$.
Prouver les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalité.

1. $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k\right)$
2. $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right) \leq \sqrt{n}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$
3. $\left\{\begin{array}{l}\text{On suppose } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k = 1. \\ \text{Montrer que : } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{c_k}) \geq n^2\end{array}\right.$

II.3 Norme préhilbertienne, distance associée

Définition 3 Soit N une application de E dans $\mathbb{R}^+$. N est une norme si

(a) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$

(b) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(c) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ inégalité triangulaire

Proposition 1 L'application $\|.\|$: $x \to \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme. C'est la **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot\rangle$. On dit aussi que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est **la forme polaire associée à la norme.**

Définition 4 Soit Ω un ensemble et soit d une application définie sur Ω^2.
On dit que d est une **distance** sur Ω lorsque :

(a) $\forall (a, b) \in \Omega^2,\ d(a, b) = d(b, a)$

(b) $\forall (a, b) \in \Omega^2,\ d(a, b) = 0 \iff a = b$

(c) $\forall (a, b, c) \in \Omega^2,\ d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (inégalité triangulaire)

Proposition 2 L'application définie sur E^2 par $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance.

Définition 5 **Vecteur normé ou unitaire** : de norme 1

Proposition 3 **Identités remarquables** Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a les égalités suivantes :

(a) **Identités de polarisation** :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}$$

(b) **Identité du parallélogramme** : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Exemple 3 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x,y) = (|x| + |y|) = \|(x,y)\|$.
Montrer que c'est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que ce n'est pas une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : on pourra utiliser l'identité du parallélogramme et considérer les vecteurs $u = (2,1)$ et $v = (1,2)$.

III Orthogonalité

III.1 Introduction

Définition 6 (a) On dit que x est **orthogonal** à y et on note « $x \perp y$ »si $\langle x, y\rangle = 0$

(b) On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est **orthogonale** si : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$.

(c) On dit qu'une famille est **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont normés.

Remarque 3 $\forall x \in E,\ x \perp 0_E$

Remarque 4 Dans la définition ci-dessus, I est un ensemble d'indices, et I peut être un ensemble fini ou infini... Dans le cas où les indices sont entiers, on utilise souvent le **symbole de Kronecker** :

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j.$$

Par exemple : la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est orthonormale si : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!],\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$.

Proposition 4 (a) Si $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale, et si $\boxed{\forall i,\ x_i \neq 0}$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

(b) Si $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale, c'est une famille libre.

Exemple 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $fn(t) = \cos(nt)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Théorème 3 (a) **Théorème de Pythagore** : $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) **Relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie** :

si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est orthogonale, alors : $\left\|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

III.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in F \times G,\ \langle x, y\rangle = 0$$

On note alors : $F \perp G$.

Proposition 5 Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \perp G$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et donc la somme $F + G$ est directe.

Définition 8 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle **orthogonal de** F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Exemple 5 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
Quel est l'orthogonal du plan (vectoriel) d'équation $x = 0$?
Quel est l'orthogonal de la droite vectorielle engendre par $(1, 1, 0)$?

Proposition 6 $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$

Proposition 7 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
(a) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
(b) $F \perp F^\perp$
(c) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
(d) $F \subset (F^\perp)^\perp = F^{\perp\perp}$
(e) $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ donc la somme $F + F^\perp$ est directe.

Exemple 6 Donner deux SEV orthogonaux pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$.

Attention : Si F est un SEV de E alors $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$ mais la somme ne vaut pas nécessairement E, autrement dit : **en dimension infinie, F et $F^\perp$ ne sont pas nécessairement supplémentaires**.
Prenons par exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Prenons $F = X\mathbb{R}[X] = \{XQ,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
On montre que $F^\perp = \{0\}$. Donc $F \oplus F^\perp = F \neq E$ et $\underline{F^{\perp\perp} = E \neq F}$.

Proposition 8 Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$, alors :

$$x \in F^\perp \iff \big(\forall i \in I,\ \langle x, f_i\rangle = 0\big)$$

IV Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et premières conséquences

Théorème 4 Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille libre de E.
Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que :

$$\forall k = 1 \cdots n, \begin{cases} \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_k) = \operatorname{vect}(v_1, \cdots, v_k) \\ \langle e_k, v_k \rangle > 0 \end{cases}$$

Preuve : **On la construit par récurrence**. On pose $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$. (On n'a pas le choix....)
Supposons que $(e_1, \cdots, e_k)$ vérifie les hypothèses, à savoir :

$$\forall i = 1 \cdots k, \begin{cases} \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_i) = (v_1, \cdots, v_i) \\ \langle e_i, v_i \rangle \geq 0 \end{cases}$$

On cherche e_{k+1}. Il est dans $\operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_k, v_{k+1})$. Posons $e_{k+1} = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right) + b v_{k+1}$.

On veut que : $\forall i = 1 \cdots k,\ \langle e_i, e_{k+1} \rangle = 0$. Ce qui après calcul nous donne : $a_i + b \langle e_i v_{k+1} \rangle = 0$.
Par ailleurs on veut avoir $\langle e_{k+1}, e_{k+1} \rangle = 1$, ce qui après calcul nous donne l'équation :

$$1 = b^2 \left\| v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v_{k+1} \rangle e_j \right\|^2 .$$

On remarque que $\left\| v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v_{k+1}, \rangle e_j \right\|^2$ est bien **différent de 0**. a faire

Enfin on écrit v_{k+1} en fonction des e_i et la condition $\langle v_{k+1}, e_{k+1} \rangle > 0$ nous donne : $b > 0$, donc
$b = \dfrac{1}{\|v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v_{k+1} \rangle e_j \|}$.

On en déduit ensuite les a_i grâce à la formule :
Conclusion : on a unicité de la famille orthonormale satisfaisant les hypothèses du théorème.
En posant successivement

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v_{k+1} \rangle e_j}{\left\| v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v_{k+1} \rangle e_j \right\|}$$

on a bien toutes les conditions souhaitées. D'où l'existence...

En pratique : on peut soit utiliser la formule ci-dessus, soit construire une base orthogonale puis normer les vecteurs ensuite.

Exemple 7
1. Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ la famille (u, v, w) où $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w) = (0, 1, 1)$..
2. On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Corollaire 1 Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est de dimension finie et $F \neq \{0_E\}$, alors F possède des bases orthonormales.

Corollaire 2 Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$, alors E possède des bases orthonormales.

Proposition 9 : Expression du produit scalaire et de la norme dans une $\mathcal{BON}$
Soit E un espace euclidien et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Soit $(x, y) \in E^2$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Alors : pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $x_i = \langle x, e_i\rangle$ et de plus $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$.

Par ailleurs, $\langle x, y\rangle =$

Expression matricielle du produit scalaire et de la norme dans une $\mathcal{BON}$.
Si on note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$, alors

$$\langle x, y\rangle = X^T Y \text{ et } \|x\|^2 = X^T X$$

Ou bien, selon les notations choisies :

$$\langle x, y\rangle = {}^tX\, Y \text{ et } \|x\|^2 = {}^tX\, X$$

NB : Quand on travaille avec une $\mathcal{BON}$, le produit scalaire s'exprime donc comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 10 Matrice d'un endomorphisme dans une $\mathcal{BON}$.
On suppose que E est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une $\mathcal{BON}$ de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1..n}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
Alors pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j)\rangle$.

V Projection orthogonale sur un SEV de dimension finie

V.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

On suppose que ***E* est de dimension quelconque.**

Si $F = \{0_E\}$, alors $F^\perp =$

Soit F un sous-espace vectoriel de E ; on suppose que ***F* est de dimension finie** et $F \neq \{0_E\}$.
Il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_p\}$ de F.
On cherche à montrer que $F \oplus F^\perp = E$.
On sait déjà que : la somme de F et de son orthogonal est directe
Il reste donc à montrer que : la somme vaut E
Raisonnement par analyse synthèse à faire au dos de page précédente/cette page.

Théorème 5 Soit E un espace préhilbertien réel **de dimension quelconque**.
Soit F un sous-espace de E, ***F* étant de dimension finie.** Alors :

- $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si $(e_1, \cdots e_p)$ est une base orthonormale de F, alors l'application

$$p_F \ : \ E \to E, \ x \mapsto \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

  est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- En reprenant les notations ci-dessus, on a l'équivalence :

$$y = p_F(x) \iff \left(y \in F \text{ et } x - y \in F^{\perp} \right)$$

Remarque 5 L'application p_F est indépendante du choix de la $\mathcal{BON}$ de F.

Définition 9 Soit F un sous-espace de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$.
Alors le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé **projecteur orthogonal sur** F (ou projection orthogonale sur F).

Notons p_F ce projecteur orthogonal sur F
Pour tout $x \in E$, le vecteur $p_F(x)$ est alors appelé **projeté orthogonal de** x **sur** F.

Remarque 6 D'après ce qui précède, si F est de dimension finie, la projection orthogonale sur F est bien définie.

Corollaire 3 Si E est euclidien (*i.e.* de dimension finie) alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire orthogonal.
Autrement dit : Tout sous-espace vectoriel F de E vérifie : $F \oplus F^{\perp} = E$.

Corollaire 4 Si F est un sous-espace de dimension finie de E, alors $F^{\perp\perp} = F$

Rappel : si E et F sont de dimensions infinies, alors F n'a pas nécessairement de supplémentaire orthogonal, et $F^{\perp\perp}$ n'est pas nécessairement égal à F.

Remarque 7 Dans le procédé de Gram-Schmidt : $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1} - p_F(v_{k+1})}{\|v_{k+1} - p_F(v_{k+1})\|} = \dfrac{p_{F^{\perp}}(v_{k+1})}{\|p_{F^{\perp}}(v_{k+1})\|}$.

V.2 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace de E, F étant de dimension finie.
Soit p le projecteur orthogonal sur F, soit x un vecteur de E et y un vecteur de F.

Proposition 11 Soit F un sous-espace de E, F étant de dimension finie.
Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.

Alors $\|x - p_F(x)\| = \min\limits_{y \in F}(\|x - y\|)$
De plus, $p_F(x)$ est alors l'unique élément z de F tel que $\|x - z\| = \min\limits_{y \in F}(\|x - y\|)$.

Définition 10 Soit F un sous-espace de E, F étant de dimension finie. Le réel $\min\limits_{y \in F}(\|x - y\|)$ est appelé **distance de x au sous-espace F** et notée $d(x, F)$

Calcul pratique de $d(x, F)$.

- Si on a une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_p)$ de F, alors $\|x - p(x)\| = \left\| x - \sum\limits_{k=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|$
- On a aussi : $\|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 = \|x\|^2$ d'où $\|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$
- Si E est de dimension finie et l'on a une BON $(f_1, \cdots f_r)$ de $F^\perp$, alors
  $x - p_F(x) = P_{F^\perp}(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle x, f_i \rangle f_i$ d'où le calcul de $\|x - p_F(x)\|$.

Exemple 8 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall \vec{u} = (x, y, z) \in E, \quad \forall \vec{v} = (x', y', z') \in E, \quad \vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sa base canonique.

1. Soit $\vec{n} = (1, 1, -1)$, et D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{n}$.
   Déterminer une équation de H, le supplémentaire orthogonal de D dans E.
2. (a) Donner une base orthonormale $(\vec{a}, \vec{b})$ de H.
   (b) En déduire une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de E.
   (c) Soit Q, la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$: cette matrice est-elle inversible ?
3. Chercher la matrice M_1 canoniquement associée à p_1, le projecteur orthogonal sur le sous-espace D.
   Chercher la matrice M_2 canoniquement associée à p_2, le projecteur orthogonal sur le sous-espace H.
4. (a) Soit le vecteur $\vec{u} = (3, 2, 1)$: déterminer son projeté orthogonal $\vec{u}_2$ sur H.
   (b) Calculer la distance de $\vec{u}$ à H.
   (c) Calculer la distance de $\vec{u}$ à D.

VI Conclusion : savoir-faire à maîtriser dans ce chapitre

- Savoir montrer qu'un application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire.
- Reconnaître des situations où l'on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Savoir montrer que deux sous-espaces F et G de E sont des supplémentaires orthogonaux.
  (a) On montre que ce sont des SEV orthogonaux, c'est à dire que tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Ils sont alors en somme directe !
  (b) On établit ensuite que $E = F + G$. Pour cela, on peut soit utiliser des arguments de dimensions (si E est de dimension finie), soit revenir à la définition et montrer que tout vecteur x de E s'écrit comme somme d'une vecteur de F et d'un vecteur de G.
- Savoir mettre en oeuvre l'algorithme de Gram-Schmidt pour calculer une famille orthonormale à partir d'une famille libre donnée.
- Savoir déterminer le projecté orthogonal d'un vecteur sur un SEV F de dimension finie.
  (a) Si l'on dispose d'un base orthonormée de F, alors $p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$.
  (b) Si l'on ne dispose pas de base orthonormée de F, il est souvent assez rapide de calcule $p(x)$ en utilisant sa carcatérisation : $p(x) \in F$ et $(x - p(x)) \in F^{\perp}$.
  (c) On peut trouver une base orthonormée de F à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, mais cela peut être pénible, donc on hésite un peu avant de se lancer dans le calcul. Et ensuite on est ramené au (a).
- Interpréter des problèmes de minimisation comme recherche de $d(x, F)$ où F est un SEV de E