1 Exercices pour les TD

***Exercice 1** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$.
Montrer que N définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ (penser aux identités de polarisation).

♡♡Exercice 2** On considère $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{telles que la série } \sum u_n^2 \text{ converge}\}$.

1. Pour x et y réels, montrer que $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Montrer que, si (u_n) et (v_n) sont des élements de E, alors la série $\sum u_n v_n$ converge absolument.
3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
4. Montrer que Φ définie sur $E \times E$ par $\Phi((u_n), (v_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E.

♡****Exercice 3** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la trace d'une matrice $M = [a_{ij}]$ par $Tr(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{R},\ (A, B) \to Tr({}^tA \cdot B)$.

1. Montrer que Φ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. On notera $<, >$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

   Exprimer $\Phi(A, B)$ en fonction des coefficients des matrices A et B. En déduire une base de E qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq n \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Cas d'égalité ?
3. Soit F le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. Déterminer l'orthogonal de F.
4. Soient A et B deux matrices de E. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$.
5. Démontrer que : $\forall A \in E,\ Tr(A) \leq \sqrt{nTr({}^tA \cdot A)}$.

♡Exercice 4** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ (on suppose $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, avec $a < b$).

1. Montrer que l'application Φ_1 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que l'application Φ_2 de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur E.
3. Soit ω une fonction continue sur $]a, b[$, à valeurs strictement positives, telle que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^n \omega(t) dt$ soit convergente.

   Montrer que l'application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\omega(t) dt$ est un produit scalaire sur E.

***Exercice 5** On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$. Donner une base orthonormée de H.

***Exercice 6** On se place dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) muni de son produit scalaire usuel.
Trouver une base orthonormale de $F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.

***Exercice 7** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous polynômes $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ appartenant à E, on définit : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E \ /\ P(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
3. On suppose $n = 5$ et on note $G = \text{Vect}(X^2(X - 1), X^3, X^4)$. Déterminer $G^\perp$.

*__Exercice 8__ Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.
On pose $F = \{f \in E \,/\, \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E \,/\, \forall t \in [0,1],\ g(t) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = G$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

__Exercice 9__ Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$. On munit E du produit scalaire défini par

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

1. Donner la dimension et une base de H.
2. Déterminer le projeté orthogonal de P sur H.

***__Exercice 10__ **Polynômes de Legendre**. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \dfrac{1}{2^n \times n!} Q_n^{(n)}$ avec $Q_n = (X^2-1)^n$.

1. Vérifier que le produit scalaire « annoncé »est bien un produit scalaire...
2. Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Etudier la parité de P_n.
4. Montrer que $(P_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En appliquant la formule de Leibniz, montrer que $P_n(X) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k$.
   En déduire $P_n(1)$ et $P_n(-1)$. Calculer $P_n(0)$.
6. Montrer que la famille $(P_k)_{k=0..n}$ est une famille orthogonale.
7. On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(t)dt = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ (intégrale de Wallis...)
   Calculer $\|P_n\|$.

__Exercice 11__ **Polynômes de Lagrange. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soient $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

1. Montrer que l'application $\left((P,Q) \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)\right)$ définit un produit scalaire que l'on notera $< \cdot, \cdot >$.
2. Pour $i = 0, ..., n$, on note L_i le polynôme $L_i = \displaystyle\prod_{j=0\ldots n,\ j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est une base orthonormale de E.
   Soit $P \in E$. Comment calculer les coordonnées de P dans cette base ?
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([x_0, x_n],\mathbb{R})$. On appelle polynôme de Lagrange de f relativement aux points $x_0, \cdots, x_n$ le polynôme $P_f = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i$.
   Vérifier que $P_f \in E$. Puis montrer que si p est un entier fixé appartenant à $\{1, \cdots, \deg(P_f)\}$, il existe un unique polynôme noté S de degré inférieur ou égal à p tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (S(x_k) - f(x_k))^2$ soit minimal.

**♡__Exercice 12__ Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
(Pour la réciproque, considérer $x \in$Ker(p), $y \in$Im(p) puis utiliser le minimum de l'application
$t \mapsto \|y + tx\|^2$.)

*♡__Exercice 13__ Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On identifiera $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer X dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\|AX - B\|$ soit minimale.

2 Exercices d'oral

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 15 Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 16 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.