Programme de colle. Semaine n°15 : du 19/01 au 23/01/2026.

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément.

I : Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Dans le programme précédent, une erreur s'était glissée : nous n'avons pas encore vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz...
Reprendre le programme précédent et ajouter ce qui suit.

Fonction génératrice : de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n$.

La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.
Utilisation de G_X pour calculer $E(X)$ et $V(X)$.

II : Espaces préhilbertiens

Révisions sur le programme de PCSI.
Le poly de cours est à l'adresse : *https ://cahier-de-prepa.fr/pc-briand-stnazaire/download?id=1402*

III : Questions de cours

1. Enoncé du théorème de transfert.
2. Enoncé du théorème d'antirépartition
3. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie **(dem).**
4. Connaître sans hésitation les lois usuelles (définition, schéma d'expérience sauf pour loi de Poisson,espérance et variance) : certaine, Bernoulli, uniforme, binomiale, géométrique, Poisson.
5. $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$ **(dem).**
6. $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$ (admis dans le cas général, démontré dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1). Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence (en paticulier lorsque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1).
7. Séries génératrices des lois usuelles.
8. Espérance et variance de la loi géométrique, de la loi de Poisson (dem).
9. Les étudiants doivent être capables de donner divers exemples de produits scalaires (en dehors du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)
10. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité **(dem).**
11. Identités de polarisation (dem).
12. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre **(dem).**
13. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires **(dem).**
14. Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3.
15. Savoir énoncer précisément le théorème de Gram-Schmidt.