

1 Exercices pour les TD

1.1 Isométries vectorielles, matrices orthogonales

Exercice 1 Déterminer toutes les matrices qui sont à la fois orthogonales et triangulaires.

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est : $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une réflexion, dont on précisera le plan invariant.

Exercice 3 Soient f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^2 dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que f et g sont des isométries vectorielles de \mathbb{R}^2 , et préciser leurs éléments géométriques.

Exercice 4 Soit P un plan euclidien orienté, muni d'une base orthonormée directe B .

Soit r une rotation vectorielle plane et a un vecteur unitaire de P .

1. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle θ de la rotation r en fonction de a et de $r(a)$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{(u, v)}$ lorsque $u = (-2, 1)$ et $v = (1, 3)$ dans B .

Exercice 5 Dans un plan euclidien on considère ρ une rotation et σ une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$

Exercice 6 On considère \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire habituel.

Soit F l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

1. Donner la dimension de F .
2. Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, w_1, w_2) de \mathbb{R}^4 telle que $s_F(x) = \langle v_1, x \rangle v_1 + \langle v_2, x \rangle v_2 - \langle w_1, x \rangle w_1 - \langle w_2, x \rangle w_2$.
3. Écrire la matrice de s_F dans la base canonique.

1.2 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

Exercice 7

1. Une symétrie est-elle un endomorphisme autoadjoint ?
2. Une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques ?
4. Quelles sont les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables ?

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^T A = A A^T$. Que dire de $A^T A$? Déterminer A .

Exercice 9 Soit a, b deux vecteurs libres d'un espace euclidien E . On définit sur E l'application

$$u : x \mapsto (a|x)b + (b|x)a.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme auto-adjoint de E .
2. Préciser son noyau.
3. Trouver ses valeurs propres.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, dont tous les coefficients diagonaux D_{ii} sont positifs. Soit $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(DH) \leq \text{Tr}(D)$.
2. Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(PM) \leq \text{Tr}(M)$.

Exercice 11 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Phi(P) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 t^k P(t) dt \right) X^k$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker(\Phi)$.
2. Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.

3. Soit $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $U^T M U = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k \right)^2 dt$.

En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

4. Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 12 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer que A définit un projecteur orthogonal.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\text{Tr}(M^T M)$ en fonction des coefficients de M .
3. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}$.

Exercice 13

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C = AB + BA$.

1. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable.
2. Soit λ une valeur propre de $A^T A$. Montrer que λ est positive.
3. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres de $A^T A$. En notant $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A , montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Exercice 15 Soient E un espace vectoriel euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer $\text{Tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.
2. On suppose f et g autoadjoints positifs. Montrer que $\text{Tr}(f \circ g) \geq 0$.

Exercice 16 Endomorphismes antisymétriques.

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$
 - $\forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle = 0$

Un endomorphisme antisymétrique est un endomorphisme vérifiant l'un de ces conditions.

2. Soit B une base orthonormée de E . On note A la matrice de f dans la base B . Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit antisymétrique.
3. On suppose que f est antisymétrique. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous espaces supplémentaires orthogonaux.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f est antisymétrique.

4. Montrer que l'endomorphisme $s = f^2$ est symétrique.
5. Soit a une valeur propre non nulle de s et x un vecteur propre associé. Montrer que $a < 0$ et que le sous espace $P = \text{vect}(x, f(x))$ est stable par f et que son orthogonal $F = P^\perp$ l'est aussi. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur le plan P dans une base orthonormée de P ?
6. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant :
 - un bloc nul (de taille quelconque).
 - des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$

2 Exercices d'oral

Exercice 17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
 - sans calcul,
 - en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
 - en utilisant le rang de la matrice,
 - en calculant A^2 .
- On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 18 Soit E un espace euclidien.

- Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 19 Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

- Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - Démontrer que u est bijectif.
- Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 20 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 21 On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par :

$$\varphi(A, A') = \text{tr}({}^t A A'),$$

où $\text{tr}({}^t A A')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^t A$ par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice 22 Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
Déterminer F^\perp .