Programme de colle. Semaine n°16 : du 26/01 au 30/01/2026.

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément.

I : Espaces préhilbertiens

Révisions sur le programme de PCSI.
Le poly de révisions est à l'adresse : *https ://cahier-de-prepa.fr/pc-briand-stnazaire/download ?id=1402*

II : Endomorphismes des espaces euclidiens

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. Exemples : symétries orthogonales, réflexions.
Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathscr{G}\ell(E)$, contient Id_E, stable par composition et passage à l'inverse. Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
b) Matrices orthogonales
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$. Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.
On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$, contient I_n, stable par composition et passage à l'inverse. Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

III : Questions de cours

1. Les étudiants doivent être capables de donner divers exemples de produits scalaires (en dehors du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité **(dem).**
3. Identités de polarisation (dem).
4. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre **(dem).**
5. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires **(dem).**
6. Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3.
7. Savoir énoncer précisément le théorème de Gram-Schmidt.
8. Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (dem)
9. Définition et caractérisations des matrices orthogonales (dem)
10. Déterminant d'une matrice orthogonale (dem), groupe spécial orthogonal (énoncé)
11. Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (dem)
12. Description des matrices orthogonales de taille 2 (énoncé) Description des isométries directes et indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 (énoncé)