

**Programme de colle. Semaine n°17 : du 02/02 au 06/02/2026.**

**NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément.**

## I : Espaces préhilbertiens

Révisions sur le programme de PCSI.

Le poly de révisions est à l'adresse : <https://cahier-de-prepa.fr/pc-briand-stnazaire/download?id=1402>

## II : Endomorphismes des espaces euclidiens

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien : Voir le programme précédent.

b) Matrices orthogonales : Voir le programme précédent.

c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien : Voir le programme précédent.

### d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Notation  $\mathcal{S}(E)$ .

Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».

**Théorème spectral** : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Forme matricielle du théorème spectral.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale (*i.e.* à l'aide du spectre). Notations  $\mathcal{S}^+(E)$ ,  $\mathcal{S}^{++}(E)$ .

Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale. Notations  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

## III : Questions de cours

1. Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires (**dem**).
2. Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille libre de cardinal 3.
3. Savoir énoncer précisément le théorème de Gram-Schmidt.
4. Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (**dem**)
5. Définition et caractérisations des matrices orthogonales (**dem**)
6. Déterminant d'une matrice orthogonale (**dem**), groupe spécial orthogonal (**énoncé**)
7. Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (**dem**)
8. Description des matrices orthogonales de taille 2 (**énoncé**) Description des isométries directes et indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 (**énoncé**)
9. Endomorphismes auto-adjoints : définition, caractérisation matricielle (**dem**)
10. Propriétés sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint (**dem**)
11. Théorème spectral (**énoncé**)
12. Endomorphismes autoadjoint positif, défini positif : définition et caractérisation à l'aide des valeurs propres (**dem**)