Table des matières

I Introduction : comment « sommer » une famille de nombres 1

II Ensembles dénombrables 1

III Familles sommables de nombres complexes 3
III.1 Familles de réels positifs 3
III.2 Cas général : familles de nombres réels ou complexes 4

I Introduction : comment « sommer » une famille de nombres

Dans le chapitre sur les séries, nous avons été amenés à sommer des termes (réels ou complexes) préalablement ordonnés :

$$\text{on pose} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_n \quad \text{et l'on étudie} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Si l'on permute deux termes de la suite (u_n) cela ne changera pas la nature de la série, ni la somme en cas de convergence. Mais que se passe-t-il si on permute une infinité de termes ?

Exemple 1 $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ est un série semi-convergente dont la somme vaut :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln(2)$ (vu dans le DS1).
Si on regroupe les termes de cette série de la façon suivante :
$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}) + ...$
On a : $\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2(2k+1)} - \dfrac{1}{2(2k+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{(2k+2)}) = v_k$
Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{1}{2}\ln(2) \neq \ln(2)$
Dans cet exemple, on a modifié l'ordre de sommation en faisant des paquets particuliers, la somme de la série en a été modifiée.

Théorème 1 (Convergence commutative, admis)
Si la série $\sum u_n$ converge $\boxed{\textbf{absolument}}$, alors pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

L'objectif des paragraphes suivants est de sommer des familles de nombres sur des ensembles plus vastes que $\mathbb{N}$, par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}^2$ et de comprendre comment intervertir les sommations.

II Ensembles dénombrables

Définition 1 (Ensemble dénombrable) Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque 1 Un ensemble fini ou dénombrable peut s'écrire sous la forme $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 2 Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.

Exemple 3 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exemple 4 Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Puis montrer que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Définition 2 (Ensemble au plus dénombrable)
Un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition 1 (Ensemble $\mathbb{N}^2$) L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Proposition 2 (Produit cartésien)
Si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors le produit cartésien $E \times F$ est dénombrable.

Exemple 5 L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Proposition 3 (Réunion finie ou dénombrable)
Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est dénombrable.

Exemple 6 On a $\quad \mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \left\{ \dfrac{p}{q} \right\}$
La proposition précédente entraine que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

III Familles sommables de nombres complexes

Nous allons définir une sommation plus solide que celle utilisée pour les séries, afin de définir la somme d'une famille de nombre réels ou complexes, qui soit indépendante de l'ordre de sommation.
Cela sera en particulier utile en probabilités.

III.1 Familles de réels positifs

Dans tout ce paragraphe, I désigne un ensemble **au plus dénombrable** et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**.

Définition 3 (Famille sommable de réels positifs)
On admet qu' à toute famille dénombrable $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs, on peut associer la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ et que pour tout découpage en paquets : $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est finie.

Remarque 2 Si $I = \mathbb{N}$, une famille de nombre positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ converge.
Remarque 3 Méthode générale :
Dans la pratique, pour montrer qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs est sommable, on choisit n'importe quel découpage en paquets de l'ensemble $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, puis on démontre que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est finie, c'est-à-dire :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = X_n$ est finie.
- Puis la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est finie

Remarque 4 (Cas particulier : $I = \mathbb{N}^2$. Séries doubles)

$$\begin{array}{cccccc}
u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \cdots & u_{0,k} & \cdots \\
u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,k} & \cdots \\
u_{2,0} & u_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_{n,0} & u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,k} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Les partitions de N^2 le plus souvent utilisées sont :

- $N^2 = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,k) \quad k\in\mathbb{N}\}$ sommation horizontale.
- $N^2 = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(n,k) \quad n\in\mathbb{N}\}$ sommation verticale.
- $N^2 = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \quad i+j=p\}$ sommation "oblique"

En appliquant la définition d'une famille sommable de nombres positifs au cas particulier de $\mathbb{N}^2$, on obtient :

Proposition 4 (Séries doubles de nombres positifs) Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres **réels positifs**. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
- Pour tout entier n, la série $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right)$ converge et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right)$ converge.
- Pour tout entier k, la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right)$ converge et la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right)$ converge.
- La série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{(i,j)\, i+j=p} u_{i,j}\right)$ converge.

Quand l'un de ces 4 points est vérifié, alors :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{(i,j)\, i+j=p} u_{i,j}\right)$$

Exemple 7 $\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, \quad u_{n,k} = \dfrac{2^{k+n}}{k!n!}$. La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exemple 8 $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$, $u_{i,j} = \dfrac{a^i b^j}{(i+j)!}$ avec $a>0$, $b>0$ et $a\neq b$.
La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

III.2 Cas général : familles de nombres réels ou complexes

Définition 4 (Famille sommable de nombres réels ou complexes)
I désigne toujours un ensemble au plus dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Remarque 5 Si $I=\mathbb{N}$, on retrouve l'équivalence entre sommabilité et convergence absolue de la série.

Exemple 9 $\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, \quad u_{n,k} = e^{i\pi/2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+k}$.
La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exemple 10 $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} = \dfrac{(i+j)!}{i!j!}x^{i+j}$.
Pour quelles valeurs du réel x, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Proposition 5 (Propriétés)

- Linéarité de la somme :
  Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et soient λ et μ dans $\mathbb{C}$.
  Alors la famille $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i) = \lambda\sum_{i\in I}u_i + \mu\sum_{i\in I}v_i$
- Comparaison :
  Si $|x_i|\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.
- Inégalité triangulaire :
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes, alors : $\displaystyle\left|\sum_{i\in I}u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I}|u_i|$
- Sommation par paquets (Fubini) :
  Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes :
  alors : $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$

Proposition 6 (Lien avec le produit de Cauchy)

Dans le chapitre sur les séries, nous avons vu que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ étaient deux séries **absolument** convergentes, alors en posant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

on obtenait la convergence absolue de la série $\sum c_n$ ainsi que la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

On peut formuler ce résultat à l'aide de familles sommables :
Si les familles $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont sommables, alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et de plus :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

EXTRAIT du PROGRAMME officiel de MATHEMATIQUES des PC.
Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-Ã -dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.