Table des matières

I Introduction

Définition 1 Rappel : Variable aléatoire discrète. On se donne $(\Omega, \mathcal{T})$.
Une application X définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est **une variable aléatoire discrète** si

- X est définie sur Ω.
- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{T}$ c'est à dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x\} \in \mathcal{T}$$

Si $X(\Omega)$ est fini, on a une variable aléatoire (discrète) finie et si $X(\Omega)$ est dénombrable, on a une variable aléatoire discrète infinie.

N.B. : ici une variable aléatoire n'est pas nécessairement réelle. $X(\omega)$ peut aussi être un vecteur par exemple....

Définition 2 Soient X et Y deux V.A. discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. L'application

$$V : \begin{array}{l} \Omega \to E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est un **couple de V.A. discrètes.**

Remarque 1 On a vu qu'un produit cartésien d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Ici, **on pourrait aussi considérer l'application V comme une variable aléatoire discrète définie sur Ω et à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.** En effet :

- Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $V^{-1}(\{(x, y)\}) = ((X = x) \cap (Y = y))$ qui est bien un événement (intersection de deux éléments de la tribu $\mathcal{T}$ par hypothèse, donc c'est bien un élément de $\mathcal{T}$).
- $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est au plus dénombrable (étant donné que X et Y sont des V.A. discrètes).

N.B. : Au lieu de noter $((X = x) \cap (Y = y))$, on peut noter $(X = x, Y = y)$.

Exemple 1 On tire un dé n fois. On note X le plus petit des numéros tirés et Y le plus grand. Puis on pose $V = (X, Y)$.

Remarque 2 A propos de $V(\Omega)$.
On a : $\forall \omega \in \Omega,\ (X(\omega), Y(\omega)) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
En toute rigueur, $V(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Par exemple, dans l'exemple précédent :

$V(\Omega) =$

$X(\Omega) \times Y(\Omega) =$

Néanmoins, l'usage est de prendre $V(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Pour certaines valeurs de x et de y, on pourra alors avoir $(X = x) \cap (Y = y) = \emptyset$, donc $P(X = x, Y = y) = 0$.
Autrement dit, pour certains $v \in V(\Omega)$, on pourra avoir $P(V = v) = 0$.
Conséquence : Le système d'événements $((X = x, Y = y))_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements, mais certains d'entre eux peuvent être de probabilité nulle. Aussi lorsque l'on appliquera la formule des probabilités totales, on précisera bien la convention usuelle :

II Loi conjointe et lois marginales d'un couple de variables aléatoires

Définition 3 Soit $V = (X, Y)$ un couple de $V.A.$ discrètes.
La loi conjointe du couple $V = (X, Y)$ est la loi de V vu comme variable aléatoire (cf remarque 1).
C'est donc la donnée de $V(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x, Y = y)$ pour tous les couples $(x, y) \in V(\Omega)$.
Les lois de X et de Y sont appelées **les lois marginales** du couple (X, Y).

Quand les V.A. sont finies, on peut représenter la loi de $V = (X, Y)$ dans un tableau.

Exemple 2 On lance successivement deux dés.
On note X=numéro du premier dé lancé. On note Y= somme des deux numéros tirés. Donner la loi de $V = (X, Y)$.

Exemple 3 On lance deux dés (un vert et un rouge) équilibrés. On note X le plus petit numéro, Y le plus grand.
Loi conjointe du couple (X, Y) ? Lois marginales de X et de Y ?

Exemple 4 On donne : $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{2^{i+j}}$. Loi conjointe du couple (X, Y) ? Lois marginales de X et de Y ?

Proposition 1 La donnée de la loi conjointe d'un couple de V.A. permet toujours de calculer les lois marginales. En effet : pour $x \in X(\Omega)$ en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X = x) =$$

et idem pour calculer la loi de Y.
La réciproque est fausse : la connaissance des lois marginales ne permet pas de calculer la loi conjointe !

Preuve Contre-exemple : On possède une urne contenant 3 boule blanches et 4 boules noirs. On fait 2 tirages successifs.
On pose $X = 1$ si la première boule est blanche et $X = 0$ si elle est noire.
On pose $Y = 1$ si la deuxième boule est blanche et $Y = 0$ si elle est noire.
Calculer la loi conjointe et les lois marginales : d'abord lorsque les tirages ont lieu sans remise, puis lorsque les tirages ont lieu avec remise

Remarque 3 On peut écrire : $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) \right) = 1$

et aussi : $\displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x, Y=y) \right) = 1$

III Loi conditionnelle

<u>**ATTENTION**</u> : **La notion d'événement conditionnel n'a AUCUN sens.**
La notion de variable aléatoire conditionnelle non plus.
En revanche : on peut calculer la probabilité conditionnelle qu'un événement soit réalisé.
Ou la loi d'une V.A. pour une probabilité conditionnelle donnée !

Définition 4 Soit A un événement de probabilité non nulle. La loi conditionnelle de X sachant A est la loi de X pour la probabilité P_A. C'est donc la donnée de $X(\Omega)$ et de $P_A(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

C'est la loi de X sachant A qui est conditionnelle, pas la V.A. X....

Définition 5 Soit (X, Y) un couple de V.A. et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x) \neq 0$.
La loi de Y sachant $(X=x)$ est la loi de Y pour la probabilité $P_{X=x}$.
C'est donc la donnée de $Y(\Omega)$ et de $P_{X=x}(Y=y)$ pour $y \in Y(\Omega)$.

Exemple 5 Reprendre l' exemple 3 et déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X=3)$.

IV Variables aléatoires indépendantes

IV.1 Rappels

- La notion d'indépendance est souvent justifiée par les conditions de l'expérience.
  Exemples : lancers successifs d'un dé donné (ou d'une pièce donnée), tirages avec remise dans une urne.
- Deux événements A et B sont indépendants **pour la probabilité** P lorsque :
- La notion d'indépendance dépend de la probabilité considérée. Il est possible que A et B soient indépents pour P_C mais pas pour P. Par exemple :
- Si A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, ainsi que $\bar{A}$ et B, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

IV.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 6 Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dites indépendantes lorsque : pour tout $A \subset X(\Omega)$ et pour tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est à dire :

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \; P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque 4 Attention : on ne suppose pas que les V.A. sont réelles ; la définition s'applique aussi à des vecteurs aléatoires par exemple.

Proposition 2 Soient X, Y variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si : pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Autrement dit : $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :

$$P(X = x,\; Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y).$$

Exemple 6 Reprendre l'exemple 2. Les V.A. X et Y sont-elles indépendantes ?

Remarque 5 X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall x \in X(\Omega), \;\; \text{tel que } P(X = x) \neq 0, \; P_{X=x}(Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = P(Y = y).$$

Donc les lois marginales sont égales aux lois conditionnelles.

Proposition 3 (dém.) Si X et Y sont indépendantes, et si f et g sont deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Autrement dit :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y).$$

Exemple 7 Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et Y^2 le sont aussi.
Si $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et $Y_1 \cdot Y_2$ sont indépendantes, etc...

IV.3 Extension de la notion d'indépendance au cas de n variables aléatoires

Rappel : Soit $(A_n)_{n\in[\![1\,;\,N]\!]}$ une famille d'événements. C'est une famille d'événements indépendants lorsque :

Theorème-Definition 1 Extension de la notion d'indépendance à n variables aléatoires.

Soient $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall A_1 \subset X_1(\Omega),\cdots,\forall A_n \subset X_n(\Omega),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in A_i\right).$

(b) $\forall (x_1,\cdots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega),$ les événements $(X_i = x_i)$ sont indépendants.

Lorsque ces affirmations sont vraies, on dit que $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes.

Remarque 6 Application : Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de variables aléatoires indépendantes.
Exemple : On lance n fois une pièce, on pose $X_i = 1$ si on obtient Pile au i-ème lancer et $X_i = 0$ sinon. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Le nombre de Pile obtenus est alors $X = \sum_{i=}^{n} X_i$.

$\boxed{\textbf{Attention}}$: Ne pas confondre les phrases suivantes, qui ne veulent pas dire la même chose :

- « les V.A. $X_1,\cdots,X_n$ sont deux à deux indépendantes »
- « les V.A. $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes »

Proposition 4 Lemme des coalitions.
Soit $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$. Soit $m \in [\![1\,;\,n-1]\!]$.

Soit $f\ :\ X_1(\Omega)\times\cdots X_m(\Omega) \to E$ et soit $g\ :\ X_{m+1}(\Omega)\times\cdots X_n(\Omega) \to E$

Si $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\cdots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\cdots,X_n)$ le sont aussi.

Preuve On remarque tout d'abord que : si $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes, alors :
$Y = (X_1,\cdots,X_m)$ et $Z = (X_{m+1},\cdots,X_n)$ sont des V.A. indépendantes.
On applique ensuite la proposition 3 aux V.A. Y et Z.

Remarque 7 On peut étendre ce lemme au cas de plus de deux coalitions :

Extension de la notion d'indépendances à des suites infinies de V.A.

Remarque 8 $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $J \subset [\![1\,;\,n]\!]$, la famille de V.A discrètes $(X_j)_{j\in J}$ est une famille de V.A. indépendantes.

On admet l'existence d'espaces probabilisés contenant une suite (infinie) de variables aléatoires indépendantes de lois discrètes données.

Définition 7 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

- C'est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque, pour toute partie **finie** I de $\mathbb{N}$, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.
- C'est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées lorsqu'elles ont toute la même loi.

Lorsque que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes Et identiquement distribuées**, on peut écrire que c'est « une suite de variables aléatoires *i.i.d.* ».

Exemple 8 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant toutes une loi de Bernoulli : $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Cette suite modélise le "jeu de Pile ou Face " (infinité de lancers d'une pièce, et $X_i = 1$ si Pile au i-ème lancer).

V A propos d'espérance....

V.1 Retour sur le théorème de transfert

Théorème 1 Théorème de transfert. Soit X une V.A. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est fini, alors $f(X)$ a une espérance et
$$E\left(f\left(X\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P(X = x_i)$$
2. Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, alors :

   $f(X)$ est d'espérance finie *si et seulement si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)P(X = x_i)$ est $\boxed{\textbf{absolument}}$ convergente.

   Dans ce cas, on a :
$$E\left(f\left(X\right)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)P(X = x_i).$$

Remarque 9 Dans ce théorème, X est une variable aléatoire qui n'est pas nécessairement réelle. X peut être un vecteur aléatoire. En revanche, f étant à valeurs réelles, $f(X)$ est bien une variable aléatoire réelle.
Si f est une fonction de deux variables, et (X, Y) un couple de V.A., on peut donc appliquer le théorème de transfert et écrire (sous réserve d'absolue convergence) :
$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x, y)P(X = x, Y = y)$$
Cette formule peut aussi s'appliquer à des n-uplets de variables aléatoires....

V.2 Calcul de $E(XY)$ lorsque X et Y sont des variables aléatoires réelles

Si X et Y sont deux V.A. réelles, alors le théorème de transfert permet d'écrire, **sous réserve d'absolue convergence** :
$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$$

Théorème 2 (dém.) : Si X et Y sont deux V.A. réelles **indépendantes** et d'espérances finies, alors XY est d'espérance finie et de plus $E(XY) = E(X)\ E(Y)$.

Remarque 10 On peut étendre ce théorème au cas de n variables aléatoires réelles :

La réciproque est fausse ! $E(XY) = E(X)\ E(Y) \not\Longrightarrow X$ et Y indépendantes...

Contre-exemple : soit X telle que $X(\Omega) = \{-1; 1; 0\}$ muni de la loi uniforme. Soit $Y = X^2$.
X et Y sont-elle indépendantes ? Calculer $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$. Conclure...

V.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et de plus

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

On a égalité si et seulement si : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha X + \beta Y = 0$ presque sûrement.

Preuve On suppose que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie.
Montrons que XY est aussi d'espérance finie.
On sait montre sans peine que : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.
D'après les hypothèses, on peut dire que $\left(\dfrac{X^2 + Y^2}{2}\right)$ est d'espérance finie.
L'inégalité $|XY| \leq \dfrac{X^2 + Y^2}{2}$ permet alors d'affirmer que XY est d'espérance finie.
Posons $H(u) = E\left((uY + X)^2\right)$. Alors

$$H(u) = E(u^2Y^2 + 2XYu + X^2) = u^2E(Y^2) + 2E(XY)u + E(X^2).$$

1er cas : Supposons que $E(Y^2) \neq 0$**.** Alors H est une fonction polynomiale du second degré. Comme elle est de signe constant, son discriminant est négatif ou nul.
Or $\Delta = 4E(XY)^2 - 4E(Y^2) \times E(X^2)$ donc

$$\Delta \leq 0 \iff E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

On a égalité si et seulement $\Delta = 0$ ce qui est équivalent à dire que H admet une unique solution réelle :

$$\exists u_0 \in \mathbb{R},\ H(u_0) = 0 \text{ c'est à dire : } E\left((X + u_0Y)^2\right) = 0.$$

Rappel : si Z est une variable aléatoire réelle discrète ***positive et d'espérance nulle****, alors $(Z = 0)$ est presque sûr (Prop 4 page 4 du 2e poly de probas).*
Ainsi en appliquant ce résultat à $Z = (uY + X)^2$, on obtient :

$$\exists u_0 \in \mathbb{R},\ \text{tel que } P(u_0Y + X = 0) = 1.$$

Ou encore : il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $aX + bY = 0$ presque sûrement.
2e cas : Supposons que $E(Y^2) = 0$**.** Alors $Y = 0$ presque sûrement.
D'une part, l'inégalité de Caucht-Scwarz est une égalité.
Par ailleurs, en prenant $a = 1$ et $b = 0$ on a : $aX + bY = 0$ presque sûrement.
Conclusion : l'inégalité de Cauchy-Schwarz est toujours vraie. Et elle est une égalité si et seulement si $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha X + \beta Y = 0$ **presque sûrement.**

V.4 Séries génératrices et variables aléatoires indépendantes

Définition 8 (Rappel) Soit X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}$.On appelle **série génératrice de** X la série

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$$

Théorème 4 (Rappel) En reprenant les notations de la définition 8, on a :

- $[-1,1] \subset \mathcal{D}_{G_X}$ (en notant $\mathcal{D}_{G_X}$ le domaine de définition de G_X).
  Le rayon de convergence R de la série génératrice vérifie $R \geqslant 1$.
- G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle $]-1,1[$.
- $G_X(1) = 1$.
- La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
  Plus précisément : $P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
  Par conséquent, si X et Y sont deux V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors : $(X \sim Y) \iff G_X = G_Y$.
- X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable (à gauche) en 1 et, **si tel est le cas** : $E(X) = G'_X(1)$.
- X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable (à gauche) en 1. Dans le cas où $G''_X(1)$ existe, on a : $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Théorème 5 Série génératrice de la somme de deux V.A. indépendantes
Soient X, Y deux V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes.
Soit R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence de G_X (resp. G_Y) et soit $\mathcal{D}_X$ (respectivement $\mathcal{D}_Y$) le domaine de définition de G_X (resp. Y).
Alors le rayon de convergence G_{X+Y} de $X+Y$ vérifie : $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$. De plus :

$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y,\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t).$$

Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

Exemple 9 Montrer les propositions suivantes :

- Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, **indépendantes.** Alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $X_1, \cdots, X_k$ sont des V.A. **indépendantes** telles que : $\forall i \in [\![1\,;\,k]\!],\ X_i \sim \mathcal{B}(n_i,p)$, alors $X_1 + \cdots + X_k \sim \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_k, p)$
- Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, **indépendantes.** Alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $X_1, \cdots, X_k$ sont des V.A. **indépendantes** telles que : $\forall i \in [\![1\,;\,k]\!],\ X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ Alors $X_1 + \cdots + X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$

VI Covariance de deux V.A.R. et variance d'une somme

Theorème-Definition 2 Soient X et Y deux V.A.R. discrètes d'espérance finies, telles que $E(XY)$ existe.
Alors $E(\,(X-E(X))\,(Y-E(Y))\,)$ existe est appelé covariance de X et de Y et est noté $\text{cov}(X,Y)$.

Remarque 11
1. La covariance de X et Y peut être négative.
2. $V(X)$ =cov(X,X).
3. Rappelons des conditions **suffisantes** permettant d'assurer l'existence de $\text{cov}(X,Y)$
   - Si X et Y sont des V.A.R. admettant un moment d'ordre 2, alors $E(XY)$ existe.
   - Si X et Y sont indépendantes et si leurs espérances existent, alors $E(XY)$ existe et vaut :

Proposition 5 Si $E(X), E(Y)$ et $E(XY)$ existent alors

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y) \quad \text{(formule de Huyghens)}.$$

Preuve C'est une conséquence de la linéarité de l'espérance. Remarquons tout d'abord que $(X-E(X))\,(Y-E(Y))=XY-E(X)Y-XE(Y)+E(X)E(Y)$.
Ainsi $(X-E(X))\,(Y-E(Y))$ estune somme de variables aléatoires d'espérances finies, donc c'est aussi une variable aléatoire d'espérance finie.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X,Y) &= E\left[\,XY-E(X)Y-XE(Y)+E(X)E(Y)\,\right]\\
&= E[XY]\;-E[E(X)Y]\;-E[E(Y)X]\;+E[E(X)E(Y)]\\
&= E(XY)\;-E(X)\,E(Y)\;-E(X)\,E(Y)\;+E(X)\,E(Y)\;=\;E(XY)-E(X)\times E(Y)
\end{aligned}$$

Proposition 6 Si X et Y sont indépendantes et si $E(X)$ et $E(Y)$ existent, alors $\text{cov}(X,Y)=0$.
Attention : la réciproque est fausse.

Preuve La première affirmation est immédiate d'après le théorème 2.
Nous avons déjà montré que la réciproque est fausse.

Définition 9 Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.

Proposition 7 Si X et Y sont deux V.A.R. admettant des moments d'ordre 2, alors V(X+Y) existe et

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\text{cov}(X,Y)$$

Proposition 8 Si $X_1,\cdots,X_n$ sont n VAR admettant des moment d'ordre 2, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$ existe et vaut :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\times\sum_{1\leq i<j\leq n}\text{cov}(X_i,X_j)$$

Preuve On suppose vérifiées les hypothèses du théorème. Justifions que $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ existe.

Posons $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Il faut donc justifier que Y^2 est d'espérance finie. Or $Y^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} X_i X_j$.
Par hypothèse : $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, $E(X_i^2)$ existe.
Par ailleurs, on sait que l'existence de moments d'ordre 2 pour X_i et X_j assure l'existence de $E(X_i X_j)$ pour tout $i \neq j$ (ainsi que celle de $E(X_i)$ pour tout i).
Donc $E(Y^2)$ existe, donc $V(Y)$ existe.

$$\begin{aligned}
V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} X_i X_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} E(X_i X_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(E\left(X_i\right)\right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} E(X_i) \times E(X_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(E(X_i^2) - (E(X_i))^2\right) + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} \left(E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Corollaire 1 Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n VAR admettant des moment d'ordre 2 et **deux à deux décorrélées**, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ existe et vaut : $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Preuve Immédiat d'après la propriété précédente. Remarquons que l'on peut appliquer ce théorème au cas où les V.A. sont indépendantes car : si les V.A. sont indépendantes, elles sont *a fortiori* indépendantes 2 à 2 et donc 2 à 2 décorrélées.

VII Inégalités probabilistes

Théorème 6 Inégalité de Markov.
Soit X une V.A.R. discrète **à valeurs positives** et d'espérance finie. Alors :

$$\forall a > 0,\ P(X \geqslant a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve Soit $a > 0$ et soit Y la fonction définie sur Ω par

$$Y(\omega) = a \text{ si } a \leqslant X(\omega) \text{ et } Y(\omega) = 0 \text{ sinon.}$$

Alors $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leqslant X(\omega)$. Par ailleurs Y est une variable aléatoire réelle discrète. En effet :

- elle est bien définie sur Ω
- $Y(\Omega)$ est fini
- $Y^{-1}(\{a\}) = (X \geqslant a)$ est bien un événement, ainsi que $Y^{-1}(\{0\}) = (X < a)$

Enfin, $E(Y)$ existe car Y est une V.A.R. finie. De plus $E(Y) = 0 \cdot P(Y = 0) + a \cdot P(Y = a) = a \cdot P(X \geqslant a)$.
Par croissance de l'espérance : $0 \leqslant E(Y) \leqslant E(X)$ c'est à dire : $a \cdot P(X \geqslant a) \leqslant E(X)$.
Donc $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

Théorème 7 Inégalité de Bienaymé-Tchébychev.
Soit X une VAR discrète admettant une espérance $E(X)$ et un variance $V(X)$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{(\sigma_X)^2}{\varepsilon^2}.$$

Preuve Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(X - E(X))^2$. On obtient alors, pour $a = \epsilon^2 > 0$:

$$P\left((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2 \right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

On remarque ensuite que : $(X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2 \iff |X - E(X)| \geqslant \varepsilon$

d'où : $P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Remarque 12 C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev qui permet de comprendre ce que mesure la variance : pour ε fixé, la probabilité que l'écart entre X et $E(X)$ soit supérieur à ε est d'autant plus petite que $V(X)$ est faible. La variance donne donc une indication de la dispersion de X autour de son espérance, c'est à dire sa tendance à s'écarter de sa moyenne.

Théorème 8 Autre version de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev. En reprenant les mêmes hypothèses que précédemment, on a : $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Preuve On reprend l'inégalité $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$. Par passage au complémentaire, on en déduit :

$$1 - P(|X - E(X)| < \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}, \quad \text{ce qui s'écrit : } P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Exemple 10 On réalise 400 fois la même expérience, dont la probabilité de succès est 0,8$=\frac{4}{5}$. On suppose que les 400 expériences sont indépendantes. Soit X le nombre de succès obtenus. Calculer $E(X)$ puis donner un minorant de $P(300 < X < 340)$.

Exemple 11 On utilise un dé équilibré. Cherchons le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers sera dans l'intervalle $]\frac{1}{6} - \frac{1}{100}, \frac{1}{6} + \frac{1}{100}[$?

VIII Loi faible des grands nombres

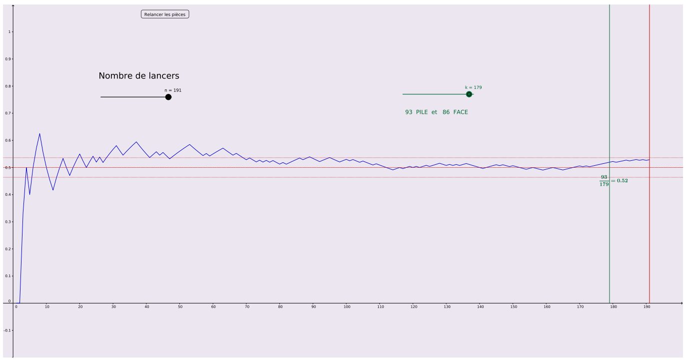
Théorème 9 Loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 2.

Alors si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \ : \ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\text{Plus précisément } : \ \forall \varepsilon > 0, \ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Avant de le montrer, interprétons ce résultat. Considérons des lancers successifs d'une pièce équilibrée.



Intuitivement, la fréquence d'apparition de « Pile » lors d'un très grand nombre de lancers devrait être proche de $\frac{1}{2}$. Rien ne nous garantit qu'au cours d'une série particulière de 10 000 lancers d'une pièce équilibrée, la fréquence d'apparition soit proche de $\frac{1}{2}$. **En revanche**, la *probabilité* que la fréquence soit proche de $1/2$ tend vers 1 quand le nombre de tirage tend vers $+\infty$.

La V.A.R. $\frac{S_n}{n}$ représente **la fréquence** de succès lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Plus généralement, réalisons une expérience aléatoire dont le résultat est une variable aléatoire X. La loi de X est inconnue, mais on a bon espoir de la connaître de mieux en mieux en répétant un grand nombre de fois l'expérience. A chacune des expériences, correspond une variable aléatoire $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Raisonnablement, on peut supposer que les n variables aléatoires réelles sont indépendantes et suivant une même loi (mais c'est une hypothèse...). Tout expérimentateur pensera à calculer la moyenne des valeurs observées

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}.$$

Il est important de noter que M_n est elle-même une variable aléatoire, somme de n variables aléatoires indépendantes. Il n'y a aucune raison de supposer que M_n suit la même loi que X (et ce n'est généralement pas le cas).
L'idée fondamentale est que M_n représente une approximation « acceptable »de l'espérance de X et qu'elle permet de s'en approcher de mieux en mieux au fur et à mesure de la répétition des expériences.

Preuve D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$.

Or $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n)$.

Comme les X_i sont indépendantes : $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nV(X_1)$ et donc

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{nV(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$