Partie 1 : Exercices pour les travaux dirigés

Exercice 1

1. On considère pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$.
   Montrer que la série de terme général u_n est convergente et donner la valeur de la somme de la série.
2. Une urne contient une boule noire et une boule blanche.
   On tire une boule de l'urne : si elle est noire, on s'arrête et $X = 1$;
   sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire.
   On tire à nouveau une boule de l'urne : si elle est noire, on s'arrête et $X = 2$;
   sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire.
   On réitère ainsi le procédé : avant le n-ieme tirage s'il a lieu, il y a dans l'urne n boules noires et une boule blanche; on tire une boule de l'urne :
   si elle est noire, on s'arrête et $X = n$; sinon on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire.
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X?
   Dans la suite de l'exercice, on utilisera les événements suivants : B_i "obtenir une boule blanche au i-eme tirage", N_i "obtenir une boule noire au i-eme tirage"
   (b) Donner la loi de X. Vérifier que la somme de la série de terme général $P(X = n)$ vaut 1.
   (c) Montrer que la variable $X+1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique si et seulement si
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) \neq 0$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)$

Indication pour la réciproque : poser $q = P(X > 1)$, déterminer $P(X > n)$ puis $P(X = n)$.
Cette caractérisation des lois géométriques est appelée "variable sans mémoire".

Exercice 3 On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boite au hasard, puis on choisit une boule dans la boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. X et Y sont-elles indépendantes?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 4 Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. On définit une variable Y :
— Si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.
— Si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $\dfrac{X}{2}$.

Trouver la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 5 Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour $r = 2,3,4,\dots$ on a

$$E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = \lambda^r.$$

Exercice 6 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.
On note $X = min(U_1,U_2)$ et $Y = max(U_1,U_2)$

1. Loi de X? Espérance de X?
2. Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $COV(X,Y)$.

Exercice 7 Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de parametre λ.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p ($p \in]0,1[$).
- Déterminer la loi conjointe du couple (N,X). Quelle est la loi de X?
- On pose $Y = N - X$. Quelle est la loi de Y? Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 8 Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1,\dots,X_N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [[1,N]]$, calculer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$.
2. Soit $Y = \max(X_1,\dots,X_N)$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
3. Montrer que Y admet une espérance.

Exercice 9 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=j, Y=k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 10 On joue à plie ou face avec une pièce non équilibrée : à chaque lancer, la probabilité d'obtenir "pile" est $2/3$.
Les lancers sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la première fois deux "pile" consécutifs.
Pour $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(X=n)$

1. Expliciter les événements $(X=2)$, $(X=3)$ et $(X=4)$ et donner les valeurs de p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour $n \geqslant 4$, on a : $p_n = \dfrac{2}{9}p_{n-2} + \dfrac{1}{3}p_{n-1}$
3. Déterminer l'expression de p_n pour tout entier n non nul.
4. Montrer que X est d'espérance finie et donner sa valeur.

Exercice 11 On désigne par p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = pq^k = P(Y=k).$$

Enfin, on pose $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple de variables aléatoires (U,V).
2. Expliciter les lois marginales de U et V.
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
4. Quelle est la loi de $U+V$?

Exercice 12 Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 13 Soit X une variable qui suit une loi de Poisson de parametre λ. Existence et calcul de $E(\dfrac{1}{X+1})$.

Exercice 14 Autour de la loi hypergéométrique :

On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches avec $N = a+b$. Comparer les lois, les espérances des variables aléatoires suivantes :
• la variable aléatoire X_n indiquant le nombre de boules blanches obtenues en n tirages avec remise (à chaque tirage, la boule tirée est immédiatement remise dans l'urne, avant le tirage suivant).
• la variable aléatoire Y_n indiquant le nombre de boules blanches obtenues en n tirages sans remise (à chaque tirage, la boule tirée est définitivement retirée de l'urne, avant le tirage suivant). On notera que ce type de tirage sans remise implique nécessairement la condition $n \leqslant N$.
Pour k fixé, étudier la limite de $P(Y_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Commentaire ?

Exercice 15 On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$). On vide l'urne en tirant successivement et sans remise les n jetons. Pour $i \in [[1, n]]$, on désigne par X_i la variable de Bernoulli prenant la valeur 1 dans le seul cas où le jeton numéroté i est tiré au $i^{ème}$ tirage.

1. Préciser le paramètre et l'espérance des variables X_i.
2. Pour $i \neq j$, déterminer $cov\left(X_i, X_j\right)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. On appelle S le nombre de coïncidences entre le n° du tirage et le n° du jeton.
   Exprimer S en fonction des X_i.
   Déterminer l'expérance et la variance de S.

Exercice 16 Une variable aléatoire X est telle que sa fonction génératrice est de la forme $G_X(t) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$ pour un certain λ réel.
Déterminer la valeur de λ, puis la loi de X. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 17 On dispose d'un dé à n faces (avec $n \geqslant 2$) qu'on lance 2 fois. On note X et Y les résultats respectifs des 2 lancers.
On souhaite prouver qu'il est impossible de truquer le dé de manière à ce que la variable $X+Y$ suive une loi uniforme sur $\{2, ..., 2n\}$.
On raisonne par l'absurde en supposant qu'on ait réussi à la faire.

1. Donner une expression de $G_{X+Y}(t)$.
   Préciser les racines (avec multiplicité) de la fonction polynomiale G_{X+Y}.
2. Quelle relation existe-t-il entre G_{X+Y} et G_X ?
3. Aboutir à une contradiction.

Exercice 18 Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu' à l'obtention de m succès.
On note X le nombre de lancers effectués.

1. Quelle est la loi de X lorsque $m = 1$?
2. Déterminer la loi de X dans le cas général.
3. Expliciter le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{m+1}}$.
4. Déterminer la fonction génératrice de X, en déduire l'espérance de X.

Exercice 19 Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". On note X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y et son espérance.
4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 20
On lance une pièce équilibrée n fois de suite.

1. A quelle condition sur n, la fréquence du nombre de pile obtenus est-elle comprise entre 40% et 60 % avec une probabilité d'au moins 95% ?
2. A l'issue de 1000 lancers, on observe une proportion de pile égale à 65%. Peut-on considérer que la pièce est équilibrée ?

Exercice 21
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes. On suppose que chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 22
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, A, P) telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose

$$a_{i,j} = P((X = j) \cap (Y = i)) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = P_{(X=j)}(Y = i).$$

On suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le nombre de couples $(i, j) \in \{1, \ldots.., n+1\}^2$ tels que $|i+j-n-2| = 1$.
2. Calculer α.
3. Déterminer les lois marginales de X et Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. On note de même la matrice $B = (b_{i,j})$. Écrire B dans le cas $n = 4$.

Exercice 23 On effectue une successions d'expériences de Bernoulli indépendantes où à chaque fois Pile apparaît avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $1-q$. On note X_1 la longueur de la première série (de Piles si Pile apparaît en premier, de Face sinon) et X_2 la longueur de la seconde série.

1. Regarder un exemple sur lequel on calculera X_1 et X_2.
2. Trouver la loi de X_1. Vérifier la cohérence du résultat.
3. Trouver la loi du couple (X_1, X_2).
4. Trouver la loi de X_2.
5. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
6. Calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
7. Montrer que pour $p \neq \frac{1}{2}$, les variables X_1 et X_2 sont dépendantes. Réciproque ?

Exercice 24
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n.
2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ? Question de cours : démontrer la loi faible des grands nombres.

Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \text{card}\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ S_k \leqslant t\}.$$

On remarquera que $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} > t]$.

3. Déterminer la loi de N_t.
4. Déterminer la fonction génératrice de N_t.

Partie 2 : exercices d'oral

Exercice 25 Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 26 On admet, dans cet exercice, que :
$\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in\,]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 27 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $P\big((X,Y)=(j,k)\big) = \dfrac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 28 Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in\,]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Dterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 29

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in\,]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.

Exercice 30 Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 31 Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant "le plus petit élément de "
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaitre la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 32 **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de parametres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

Exercice 33 Soit n un entier naturel supérieur ou égal Ã 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boite formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultaément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 34 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 35 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :
$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indpendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 36
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une Ã une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 37 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Exercice 38 On admet, dans cet exercice, que :
$\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in]-1,1[$, $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et Ã valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :
$\forall\, (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.