

Table des matières

I Normes sur un espace vectoriel	1
I.1 Norme et distance	1
I.2 Normes usuelles.	2
I.3 Normes dans un espace de fonction	2
I.4 Partie bornée pour une norme donnée	2
II Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	2
III Comparaison des normes	3
IV Topologie d'un espace vectoriel normé	4
IV.1 Ouvert, fermé	4
IV.2 Intérieur, adhérence	5
IV.3 Partie Convexe	5
V Limite/continuité d'une fonction $f : E \rightarrow F$ avec E et F e v n	6
V.1 Définitions, Premières propriétés	6
V.2 Continuité et ouverts/fermés	6
V.3 Application Lipschitzienne	7
VI Espace vectoriel de dimension finie	7
VI.1 Equivalence des normes en dimension finie	7
VI.2 Utilisation des coordonnées	7
VI.3 Fonction continue sur une partie fermée bornée	8
VI.4 Cas particuliers : fonctions linéaires, polynomiales, multilinéaires	8

ESPACES VECTORIELS NORMES

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Normes sur un espace vectoriel

I.1 Norme et distance

Définition 1 (Norme)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

Notation : $\|x\| = N(x)$

Un vecteur x de E est dit unitaire si sa norme $\|x\| = 1$.

Exemple 1 Si E est un \mathbb{R} espace vectoriel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle , on définit la norme associée au produit scalaire en posant $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Dans ce cas particulier, on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Exemple 2 Si $E = \mathbb{R}$, la fonction valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .

Exemple 3 Si $E = \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto |z|$ est une norme sur \mathbb{C} .

Proposition 1 (Une deuxième inégalité triangulaire)

Dans un espace vectoriel normé, on a, pour tous (x, y) de E^2 :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Définition 2 (Distance associée à une norme) Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. La distance associée à cette norme est l'application

$$\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{cases}$$

Proposition 2 Les propriétés de la norme donnent :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

I.2 Normes usuelles.

Exemple 4 (Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Exemple 5 (Norme hermitienne sur \mathbb{C}^n .) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$
Vérifier que c'est une norme.

Exemple 6 (La norme $\|\cdot\|_1$ sur \mathbb{K}^n .) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
Nous avons déjà rencontré cette norme dans \mathbb{R}^2 (cours "espaces préhilbertiens"). Nous avons vu que c'était une norme, mais que ce n'était pas une norme euclidienne.

Exemple 7 (La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Exemple 8 (Une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$.

I.3 Normes dans un espace de fonction

Exemple 9 (Norme uniforme)

Ici, E désigne l'ensemble des fonctions bornées d'un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} .

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} \{|f(t)|\}$$

$\|\cdot\|_\infty$ est appelée norme uniforme ou aussi norme infini.

Exemple 10 (Norme de la convergence en moyenne)

Ici, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} et intégrables.

$$\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$$

Exemple 11 Ici, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} .

Vérifier que $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

Quelle est la norme associée ?

I.4 Partie bornée pour une norme donnée

Définition 3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et soit A une partie de E .
On dit que A est une **partie bornée** de E (pour la norme $\|\cdot\|$) lorsque :

$$\exists K \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ tel que } \forall x \in A, \|x\| \leq K.$$

Exemple 12 Donner des exemples de parties bornées, dans différents contextes...

II Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Définition 4 (Convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $d(x_n, \ell)$ tend vers 0, lorsque n tend vers ∞ .

$$\left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell\right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \ell) = 0\right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(x_n, \ell) \leq \varepsilon)$$

Une suite est dite **convergente** lorsqu'un tel ℓ existe.

Proposition 3 (Unicité de la limite)

Soit (x_n) une suite à valeurs dans E , on note ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de E .

Si $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_1$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Conséquence : Lorsqu'une suite admet une limite, on peut alors parler de la limite de la suite et on note :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

' **Remarque 1** Cette notion de convergence d'une suite d'éléments de E dépend du choix de la norme.

Exemple 13 Soit E l'ensemble des fonctions bornées continues et intégrables sur \mathbb{R}^+ .

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n - \frac{1}{n} \text{ ou } x \geq n + \frac{1}{n} \\ n(x - (n - \frac{1}{n})) & \text{si } x \in [n - \frac{1}{n}; n] \\ -n(x - (n + \frac{1}{n})) & \text{si } x \in [n; n + \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de f_n .

On note f la fonction nulle. Etudier $\|f_n - f\|_\infty$ et $\|f_n - f\|_1$

Proposition 4 (Convergence des suites extraites) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E .

- Si la suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.
- Réciproquement, s'il existe un élément ℓ de E tel que les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ

Proposition 5 Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de E et soit λ un scalaire.

On suppose que $x_n \rightarrow \ell_1$ et $y_n \rightarrow \ell_2$; alors $(x_n + \lambda y_n) \rightarrow \ell_1 + \lambda \ell_2$

Définition 5 Une suite $(x_n)_n$ est bornée si il existe un réel $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

Proposition 6 Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse

III Comparaison des normes

Définition 6 (Normes équivalentes) Soit E un espace vectoriel.

Deux normes N et N' définies sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, N(x) \leq \alpha N'(x) \text{ et } N'(x) \leq \beta N(x)$$

Proposition 7 (Invariance du caractère borné et de la convergence.)

Si deux normes N et N' sont équivalentes sur E , alors :

- Toute partie, toute suite, toute application bornée pour l'une, l'est pour l'autre.
- Si une suite converge vers ℓ pour l'une, alors elle converge vers ℓ pour l'autre.

Exemple 14 Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes : On reprend l'exemple 13. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ de E sont-elles équivalentes ?

' **Exemple 15** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ (de \mathbb{R}^n) sont équivalentes.

' **Exemple 16** Faire l'exercice 1 de la feuille d'exercices.

IV Topologie d'un espace vectoriel normé

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. La distance associée est notée d .

IV.1 Ouvert, fermé

Définition 7 (Boules et spheres) Soit $a \in E$ et soit r un réel strictement positif.

La boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$

La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$

La sphere de centre a et de rayon r est $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$

Exemple 17 Dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 décrire $B(a, r)$ pour les différentes normes.

Remarque 2 On peut reformuler la définition d'une partie bornée de la manière suivante : Une partie A de E est dite bornée lorsque : il existe un réel $R > 0$ tel que $A \subset B(0_E, R)$.

Définition 8 (Partie ouverte) Une partie U de E est dite ouverte lorsque :

$$\forall a \in U, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \subset U$$

Exemple 18 \emptyset et E sont des ouverts.

Exemple 19 Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$

Exemple 20 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$

Exemple 21 Une boule ouverte $B(a, r)$ est ouverte.

Une boule fermée $B_f(a, r)$ n'est pas ouverte.

Définition 9 (Partie fermée)

Une partie A de E est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Exemple 22 L'ensemble vide est un fermé de E .

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$ est une partie fermée de E .

Exemple 23 Dans $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $I = [2, 5]$, $J = [1; 6[$ et $K = [4; +\infty[$ sont ils ouverts, fermés ?

Proposition 8 (Caractérisation séquentielle des fermés) Soit $A \subset E$. Alors A est une partie fermée de E si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A , autrement dit :

$$\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \ell \in A.$$

Proposition 9 (Intersection et réunion d'ouverts ou de fermés)

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie $A_1 \cap \dots \cap A_n$ d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie $B_1 \cup \dots \cup B_n$ de fermé est un fermé.

Remarque 3 Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert :

Dans \mathbb{R} , on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}[= [0, 1]$

IV.2 Intérieur, adhérence

Définition 10 (Intérieur) Soit A une partie de E .

Un point $a \in A$ est dit intérieur à A lorsqu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A est noté : $\overset{\circ}{A}$, c'est l'intérieur de A .

' **Remarque 4** Une partie A est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.

Définition 11 (Adhérence) Soit A une partie de E .

Un point $x \in E$ est dit adhérent à A lorsque toute boule de centre x rencontre A .

On appelle adhérence de A , et on note \bar{A} , l'ensemble des points adhérents à A .

' **Remarque 5** Une partie A est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence

Proposition 10 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)

Soit A une partie de E et a un point de E .

Le point a est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .

Remarque 6 Soit A une partie de E . Les 3 propositions suivantes sont équivalentes

- A est fermée .
- $A = \bar{A}$.
- La limite de toute suite convergente de A est dans A .

Définition 12 (Partie dense) Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E .

La partie A est dense si son adhérence $\bar{A} = E$.

' **Exemple 24** L'ensemble des nombres rationnels est dense dans \mathbb{R} .

Définition 13 (Frontière) La frontière d'une partie A de E est l'ensemble $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Exemple 25 Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x \leq 3 \text{ et } -1 \leq y < 2\}$.

Le point $((3; 0)$ est-il un point intérieur à A ? le point $(2, 1)$?

Le point $(1, 2)$ est-il adhérent à A ?

Déterminer la frontière de A .

IV.3 Partie Convexe

Définition 14 (segment) Soient a et b deux vecteurs de E . Le segment d'extrémité a et b est l'ensemble des vecteurs x de E pouvant s'écrire sous la forme $x = ta + (1 - t)b$ avec $t \in [0; 1]$.

Notation : $[a; b] = \{ta + (1 - t)b, \quad t \in [0; 1]\}$

Définition 15 (Partie convexe)

Une partie A de E est dite convexe lorsque pour tous a et b dans A , le segment $[a; b]$ est inclus dans A .

' **Exemple 26** L'ensemble vide et E sont convexes.

Proposition 11 (Convexité des boules) Toute boule ouverte ou fermée est une partie convexe.

! **Exemple 27** On peut faire ici (avec profit) l'exercice 7 de la feuille d'exercices

V Limite/continuité d'une fonction $f : E \rightarrow F$ avec E et F e v n

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels normés ; les normes sont notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$; les distances associées sont notées d_E et d_F

V.1 Définitions, Premières propriétés

Définition 16 (Limite d'une fonction) Soit A une partie de E , soit $f : A \rightarrow F$ une fonction et soit a un point adhérent à A . Soit $b \in F$

On dit que f admet pour limite b , en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad (\|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon)$$

Si f admet deux limites b_1 et b_2 en a , alors $b_1 = b_2$.

Conséquence : lorsque f admet une limite en a , celle ci est appelée **la** limite de f , et est notée $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Proposition 12 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit A une partie de E , soit $f : A \rightarrow F$ une fonction. Soit a un point adhérent à A et soit $\ell \in F$. Alors :

$$\left(\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \iff \left(\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell \right).$$

Proposition 13 (Composition des limites)

Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow G$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $a \in \bar{A}$ et soit $b \in \bar{B}$. Soit $c \in G$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et que $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$; alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Proposition 14 (Combinaisons linéaires)

Soient f et g deux fonctions de $A \rightarrow F$. Soit $a \in \bar{A}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ et que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + \lambda g)(x) = b_1 + \lambda b_2$

V.2 Continuité et ouverts/fermés

Définition 17 (Continuité) Soit $f : A \rightarrow F$ et soit $a \in A$.

On dit que l'application f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point a de A .

Remarque 7 Si f admet une limite b en a , et si $a \notin A$, on peut alors prolonger f en a en posant $f(a) = b$. Ce prolongement, noté abusivement f est alors continu en a

Proposition 15 (Continuité d'une composée)

Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow G$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $a \in A$ et on note $b = f(a) \in B$.

- Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .
- Si f est continue sur A et si g est continue sur B , alors $g \circ f$ est continue sur A .

Proposition 16 (Combinaisons linéaires)

Soient f et g deux fonctions de $A \rightarrow F$. Soit $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f et g sont continues sur A , alors $f + \lambda g$ est continue sur A .

Théorème 1 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé)

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction continue. Alors :

- l'image réciproque d'un ouvert $B \subset F$ est un ouvert de E :

$$B \text{ ouvert de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \text{ est un ouvert de } E$$

- l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E :

$$B \text{ fermé de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \text{ est un fermé de } E$$

Proposition 17 (Cas particulier $F = \mathbb{R}$) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- L'ensemble $U = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
- Les ensembles $V = \{x \in E, f(x) \geq 0\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = 0\}$ sont des fermés de E .

Exemple 28 $E = \mathbb{R}^3$ et $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 7z \geq 0\}$

V.3 Application Lipschitzienne

Définition 18 Une application $f : A \rightarrow F$, avec A partie de E , est dite lipschitzienne lorsqu'il existe un réel k tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

Proposition 18 (Continuité des applications lipschitziennes)

Toute application lipschitzienne est continue.

Exemple 29 L'application "norme" : $E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne

VI Espace vectoriel de dimension finie

VI.1 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 2 (Equivalence des normes (admis))

Toutes les normes d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sont équivalentes.

Conséquence : en dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

VI.2 Utilisation des coordonnées

Proposition 19 (Convergence et coordonnées) E est un espace vectoriel normé de dimension p . On note $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ une base de E .

Soit (x_n) une suite d'éléments de E et soit $\ell \in E$. On note $(x_{1,n}, \dots, x_{p,n})$ et (ℓ_1, \dots, ℓ_p) les coordonnées de (x_n) et de ℓ dans cette base.

La suite (x_n) converge vers ℓ si et seulement si pour chaque entier $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite $(x_{k,n})$ converge vers ℓ_k

Exemple 30 Dans $E = M_3(\mathbb{K})$, on considère la suite (A_n) avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ a'_n & b'_n & c'_n \\ a''_n & b''_n & c''_n \end{pmatrix}$

Proposition 20 (Fonctions coordonnées)

Soit $f : A \rightarrow E$ (avec A partie d'un espace vectoriel normé F). Soit $a \in \bar{A}$ et soit $b \in E$.

On note f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f et (b_1, \dots, b_p) les coordonnées de b dans la base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$$

Exemple 31 Dans $E = M_2(\mathbb{K})$, on considère la fonction f avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$

Proposition 21 (Continuité et coordonnées)

Soit $f : A \rightarrow E$ (avec A partie d'un espace vectoriel normé F). Soit a un point de A .
 f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnées f_k est continue en a .

VI.3 Fonction continue sur une partie fermée bornée

Théorème 3 (Extrema d'une fonction numérique sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit A une partie **fermée bornée** de E .
 Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 8 Traduire le résultat précédent lorsque $E = \mathbb{R}$.

VI.4 Cas particuliers : fonctions linéaires, polynomiales, multilinéaires

Théorème 4 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose E de dimension finie.
 Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne donc continue.

Théorème 5 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)

Soient E et F , 2 espaces vectoriels normés de dimension finie. Et soit G un espace vectoriel normé.
 Toute application bilinéaire $B : E \times F \rightarrow G$ est continue.

Théorème 6 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)

Soient E_1, \dots, E_p p espaces vectoriels. Et soit F un espace vectoriel. On considère :

$$f : \begin{cases} E_1 \times E_2 \dots \times E_p & \rightarrow F \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{cases}$$

On rappelle que f est p -linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et pour tout (x_1, x_2, \dots, x_p) de $E_1 \times E_2 \dots \times E_p$,
 l'application partielle $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est une application linéaire de E_i vers F .
 Si f est p -linéaire et si les E_1, \dots, E_p sont de dimension finie, alors f est continue.

Proposition 22 (Continuité de l'application déterminant)

L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Remarque 9 Conséquence : l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 19 (Fonction polynomiale)

Soit A une partie de E , \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.
 Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale lorsqu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que l'expression de $f(x)$ soit un polynôme en les coordonnées de x dans \mathcal{B} .

Proposition 23 (Continuité) Toute fonction polynomiale est continue.