

## Table des matières

<b>I Normes sur un espace vectoriel</b>	<b>1</b>
I.1 Norme et distance . . . . .	1
I.2 Normes usuelles. . . . .	2
I.3 Normes dans un espace de fonction . . . . .	2
I.4 Partie bornée pour une norme donnée . . . . .	2
<b>II Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé</b>	<b>2</b>
<b>III Comparaison des normes</b>	<b>3</b>
<b>IV Topologie d'un espace vectoriel normé</b>	<b>4</b>
IV.1 Ouvert, fermé . . . . .	4
IV.2 Intérieur, adhérence . . . . .	5
IV.3 Partie Convexe . . . . .	5
<b>V Limite/continuité d'une fonction <math>f : E \rightarrow F</math> avec <math>E</math> et <math>F</math> e v n</b>	<b>6</b>
V.1 Définitions, Premières propriétés . . . . .	6
V.2 Continuité et ouverts/fermés . . . . .	6
V.3 Application Lipschitzienne . . . . .	7
<b>VI Espace vectoriel de dimension finie</b>	<b>7</b>
VI.1 Equivalence des normes en dimension finie . . . . .	7
VI.2 Utilisation des coordonnées . . . . .	7
VI.3 Fonction continue sur une partie fermée bornée . . . . .	8
VI.4 Cas particuliers : fonctions linéaires, polynomiales, multilinéaires . . . . .	8

## ESPACES VECTORIELS NORMES

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Normes sur un espace vectoriel

#### I.1 Norme et distance

**Définition 1 (Norme)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$  et  $N(x) = 0 \iff x = 0$ .
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ .
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (Inégalité triangulaire)

Notation :  $\|x\| = N(x)$

Un vecteur  $x$  de  $E$  est dit unitaire si sa norme  $\|x\| = 1$ .

**Exemple 1** Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle , \rangle$ , on définit la norme associée au produit scalaire en posant  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Dans ce cas particulier, on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**Exemple 2** Si  $E = \mathbb{R}$ , la fonction valeur absolue est une norme sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 3** Si  $E = \mathbb{C}$ , la fonction  $z \mapsto |z|$  est une norme sur  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 1 (Une deuxième inégalité triangulaire)**

Dans un espace vectoriel normé, on a, pour tous  $(x, y)$  de  $E^2$  :

$$\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|$$

**Définition 2 (Distance associée à une norme)** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . La distance associée à cette norme est l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{array} \right.$$

**Proposition 2** Les propriétés de la norme donnent :

- $\forall(x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall(x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall(x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

## I.2 Normes usuelles.

**Exemple 4 (Norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .)**  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

**Exemple 5 (Norme hermitienne sur  $\mathbb{C}^n$ .)**  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$   
Vérifier que c'est une norme.

**Exemple 6 (La norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $\mathbb{K}^n$ .)**  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

Nous avons déjà rencontré cette norme dans  $\mathbb{R}^2$  (cours "espaces préhilbertiens"). Nous avons vu que c'était une norme, mais que ce n'était pas une norme euclidienne.

**Exemple 7 (La norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .)**  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

**Exemple 8 (Une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$ .)**  $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$ .

## I.3 Normes dans un espace de fonction

**Exemple 9 (Norme uniforme)**

Ici,  $E$  désigne l'ensemble des fonctions bornées d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} \{|f(t)|\}$$

$\|\cdot\|_\infty$  est appelée norme uniforme ou aussi norme infini.

**Exemple 10 (Norme de la convergence en moyenne)**

Ici,  $E$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et intégrables.

$$\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$$

**Exemple 11** Ici,  $E$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

Quelle est la norme associée ?

## I.4 Partie bornée pour une norme donnée

**Définition 3** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et soit  $A$  une partie de  $E$ .  
On dit que  $A$  est une **partie bornée** de  $E$  (pour la norme  $\|\cdot\|$ ) lorsque :

$$\exists K \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ tel que } \forall x \in A, \|x\| \leq K.$$

**Exemple 12** Donner des exemples de parties bornées, dans différents contextes...

## II Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

**Définition 4 (Convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé)**

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $E$  et soit  $\ell \in E$ . On dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si et seulement si suite numérique  $d(x_n, \ell)$  tend vers 0, lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ .

$$\left( x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \right) \iff \left( \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \ell) = 0 \right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, \ell) \leq \varepsilon)$$

Une suite est dite **convergente** lorsqu'un tel  $\ell$  existe.

**Proposition 3 (Unicité de la limite)**

Soit  $(x_n)$  une suite à valeurs dans  $E$ , on note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  deux éléments de  $E$ .

Si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_1$  et  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_2$  alors  $\ell_1 = \ell_2$

**Conséquence :** Lorsqu'une suite admet une limite, on peut alors parler de **[la]** limite de la suite et on note :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**' Remarque 1** Cette notion de convergence d'une suite d'éléments de  $E$  dépend du choix de la norme.

**Exemple 13** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions bornées continues et intégrables sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n - \frac{1}{n} \text{ ou } x \geq n + \frac{1}{n} \\ n(x - (n - \frac{1}{n})) & \text{si } x \in [n - \frac{1}{n}; n] \\ -n(x - (n + \frac{1}{n})) & \text{si } x \in [n; n + \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f_n$ .

On note  $f$  la fonction nulle. Etudier  $\|f_n - f\|_\infty$  et  $\|f_n - f\|_1$

**Proposition 4 (Convergence des suites extraites)** Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $E$ .

- Si la suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.
- Réciproquement, s'il existe un élément  $\ell$  de  $E$  tel que les deux suites extraites  $(x_{2n})$  et  $(x_{2n+1})$  convergent vers  $\ell$ , alors la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $\ell$

**Proposition 5** Soient  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  deux suites d'éléments de  $E$  et soit  $\lambda$  un scalaire.

On suppose que  $x_n \rightarrow \ell_1$  et  $y_n \rightarrow \ell_2$ ; alors  $(x_n + \lambda y_n) \rightarrow \ell_1 + \lambda \ell_2$

**Définition 5** Une suite  $(x_n)_n$  est bornée si il existe un réel  $M \geq 0$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$ .

**Proposition 6** Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse

### III Comparaison des normes

**Définition 6 (Normes équivalentes)** Soit  $E$  un espace vectoriel.

Deux normes  $N$  et  $N'$  définies sur  $E$  sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que :

$$\forall x \in E, N(x) \leq \alpha N'(x) \quad \text{et} \quad N'(x) \leq \beta N(x)$$

**Proposition 7 (Invariance du caractère borné et de la convergence.)**

Si deux normes  $N$  et  $N'$  sont équivalentes sur  $E$ , alors :

- Toute partie, toute suite, toute application bornée pour l'une, l'est pour l'autre.
- Si une suite converge vers  $\ell$  pour l'une, alors elle converge vers  $\ell$  pour l'autre.

**' Exemple 14 Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes :** On reprend l'exemple 13. Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  de  $E$  sont-elles équivalentes ?

**' Exemple 15** Soit  $E = \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  (de  $\mathbb{R}^n$ ) sont équivalentes.

**' Exemple 16** Faire l'exercice 1 de la feuille d'exercices.

## IV Topologie d'un espace vectoriel normé

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . La distance associée est notée  $d$ .

### IV.1 Ouvert, fermé

**Définition 7 (Boules et sphères)** Soit  $a \in E$  et soit  $r$  un réel strictement positif.

La boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  est  $B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$

La boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  est  $B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$

La sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  est  $S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$

| **Exemple 17** Dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  décrire  $B(a, r)$  pour les différentes normes.

| **Remarque 2** On peut reformuler la définition d'une partie bornée de la manière suivante : Une partie  $A$  de  $E$  est dite bornée lorsque : il existe un réel  $R > 0$  tel que  $A \subset B(0_E, R)$ .

**Définition 8 (Partie ouverte)** Une partie  $U$  de  $E$  est dite ouverte lorsque :

$$\forall a \in U, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \subset U$$

| **Exemple 18**  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts.

| **Exemple 19** Dans  $E = \mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne,  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$

| **Exemple 20**  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$

| **Exemple 21** Une boule ouverte  $B(a, r)$  est ouverte.

Une boule fermée  $B_f(a, r)$  n'est pas ouverte.

**Définition 9 (Partie fermée)**

Une partie  $A$  de  $E$  est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

| **Exemple 22** L'ensemble vide est un fermé de  $E$ .

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$  est une partie fermée de  $E$ .

| **Exemple 23** Dans  $E = \mathbb{R}$  muni de la valeur absolue,  $I = [2, 5]$ ,  $J = [1; 6[$  et  $K = [4; +\infty[$  sont ils ouverts, fermés ?

**Proposition 8 (Caractérisation séquentielle des fermés)** Soit  $A \subset E$ . Alors  $A$  est une partie fermée de  $E$  si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $A$  a sa limite dans  $A$ , autrement dit :

$$\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \ell \in A.$$

**Proposition 9 (Intersection et réunion d'ouverts ou de fermés)**

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie  $B_1 \cup \dots \cup B_n$  de fermé est un fermé.

| **Remarque 3** Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert :

Dans  $\mathbb{R}$ , on a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n} \right[ = [0, 1]$

## IV.2 Intérieur, adhérence

**Définition 10 (Intérieur)** Soit  $A$  une partie de  $E$ .

Un point  $a \in A$  est dit intérieur à  $A$  lorsqu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(a, \varepsilon) \subset A$ .

L'ensemble des points intérieurs à  $A$  est noté :  $\overset{o}{A}$ , c'est l'intérieur de  $A$ .

¶ **Remarque 4** Une partie  $A$  est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.

**Définition 11 (Adhérence)** Soit  $A$  une partie de  $E$ .

Un point  $x \in E$  est dit adhérent à  $A$  lorsque toute boule de centre  $x$  rencontre  $A$ .

On appelle adhérence de  $A$ , et on note  $\bar{A}$ , l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

¶ **Remarque 5** Une partie  $A$  est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence

**Proposition 10 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $a$  un point de  $E$ .

Le point  $a$  est adhérent à  $A$  si et seulement si il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ .

¶ **Remarque 6** Soit  $A$  une partie de  $E$ . Les 3 propositions suivantes sont équivalentes

- $A$  est fermée .
- $A = \bar{A}$ .
- La limite de toute suite convergente de  $A$  est dans  $A$ .

**Définition 12 (Partie dense)** Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ .

La partie  $A$  est dense si son adhérence  $\bar{A} = E$ .

¶ **Exemple 24** L'ensemble des nombres rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 13 (Frontière)** La frontière d'une partie  $A$  de  $E$  est l'ensemble  $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{o}{A}$

**Exemple 25** Dans  $E = \mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne, on considère

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x \leq 3 \text{ et } -1 \leq y < 2\}$ .

Le point  $(3; 0)$  est-il un point intérieur à  $A$ ? le point  $(2, 1)$ ?

Le point  $(1, 2)$  est-il adhérent à  $A$ ?

Déterminer la frontière de  $A$ .

## IV.3 Partie Convexe

**Définition 14 (segment)** Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $E$ . Le segment d'extremité  $a$  et  $b$  est

l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $E$  pouvant s'écrire sous la forme  $x = ta + (1 - t)b$  avec  $t \in [0; 1]$ .

Notation :  $[a; b] = \{ta + (1 - t)b, \quad t \in [0; 1]\}$

**Définition 15 (Partie convexe)**

Une partie  $A$  de  $E$  est dite convexe lorsque pour tous  $a$  et  $b$  dans  $A$ , le segment  $[a; b]$  est inclus dans  $A$ .

¶ **Exemple 26** L'ensemble vide et  $E$  sont convexes.

**Proposition 11 (Convexité des boules)** Toute boule ouverte ou fermée est une partie convexe.

**Exemple 27** On peut faire ici (avec profit) l'exercice 7 de la feuille d'exercices

## V Limite/continuité d'une fonction $f : E \rightarrow F$ avec $E$ et $F$ e v n

Dans tout ce paragraphe,  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés ; les normes sont notées  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  ; les distances associées sont notées  $d_E$  et  $d_F$

### V.1 Définitions, Premières propriétés

**Définition 16 (Limite d'une fonction)** Soit  $A$  une partie de  $E$ , soit  $f : A \rightarrow F$  une fonction et soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . Soit  $b \in F$

On dit que  $f$  admet pour limite  $b$ , en  $a$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad (\|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon)$$

Si  $f$  admet deux limites  $b_1$  et  $b_2$  en  $a$ , alors  $b_1 = b_2$ .

Conséquence : lorsque  $f$  admet une limite en  $a$ , celle ci est appelée **la limite de  $f$** , et est notée  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**Proposition 12 (Caractérisation séquentielle de la limite)**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , soit  $f : A \rightarrow F$  une fonction. Soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et soit  $\ell \in F$ . Alors :

$$\left( \ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \iff \left( \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell \right).$$

**Proposition 13 (Composition des limites)**

Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow G$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Soit  $a \in \bar{A}$  et soit  $b \in \bar{B}$ . Soit  $c \in G$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et que  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ ; alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

**Proposition 14 (Combinaisons linéaires)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $A \rightarrow F$ . Soit  $a \in \bar{A}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} (f + \lambda g)(x) = b_1 + \lambda b_2$

### V.2 Continuité et ouverts/fermés

**Définition 17 (Continuité)** Soit  $f : A \rightarrow F$  et soit  $a \in A$ .

On dit que l'application  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $A$  lorsque  $f$  est continue en tout point  $a$  de  $A$ .

**Remarque 7** Si  $f$  admet une limite  $b$  en  $a$ , et si  $a \notin A$ , on peut alors prolonger  $f$  en  $a$  en posant  $f(a) = b$ . Ce prolongement, noté abusivement  $f$  est alors continu en  $a$

**Proposition 15 (Continuité d'une composée)**

Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow G$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Soit  $a \in A$  et on note  $b = f(a) \in B$ .

- Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $g$  est continue en  $b = f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est continue sur  $A$  et si  $g$  est continue sur  $B$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $A$ .

**Proposition 16 (Combinaisons linéaires)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $A \rightarrow F$ . Soit  $a \in A$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $A$ , alors  $f + \lambda g$  est continue sur  $A$ .

**Théorème 1 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé)**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction continue. Alors :

- l'image réciproque d'un ouvert  $B \subset F$  est un ouvert de  $E$  :

$$B \text{ ouvert de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \text{ est un ouvert de } E$$

- l'image réciproque d'un fermé de  $F$  est un fermé de  $E$  :

$$B \text{ fermé de } F \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \text{ est un fermé de } E$$

**Proposition 17 (Cas particulier  $F = \mathbb{R}$ )** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors :

- L'ensemble  $U = \{x \in E, f(x) > 0\}$  est un ouvert de  $E$ .
- Les ensembles  $V = \{x \in E, f(x) \geq 0\}$  et  $W = \{x \in E, f(x) = 0\}$  sont des fermés de  $E$ .

**Exemple 28**  $E = \mathbb{R}^3$  et  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 7z \geq 0\}$

### V.3 Application Lipschitzienne

**Définition 18** Une application  $f : A \rightarrow F$ , avec  $A$  partie de  $E$ , est dite lipschitzienne lorsqu'il existe un réel  $k$  tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

**Proposition 18 (Continuité des applications lipschitziennes)**

Toute application lipschitzienne est continue.

**Exemple 29** L'application "norme" :  $E \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne

## VI Espace vectoriel de dimension finie

### VI.1 Equivalence des normes en dimension finie

**Théorème 2 (Équivalence des normes (admis))**

Toutes les normes d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie sont équivalentes.

Conséquence : en dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

### VI.2 Utilisation des coordonnées

**Proposition 19 (Convergence et coordonnées)**  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension  $p$ . On note  $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$  une base de  $E$ .

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  et soit  $\ell \in E$ . On note  $(x_{1,n}, \dots, x_{p,n})$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_p)$  les coordonnées de  $(x_n)$  et de  $\ell$  dans cette base.

La suite  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si pour chaque entier  $k \in \{1, \dots, p\}$ , la suite  $(x_{k,n})$  converge vers  $\ell_k$

**Exemple 30** Dans  $E = M_3(\mathbb{K})$ , on considère la suite  $(A_n)$  avec  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ a'_n & b'_n & c'_n \\ a''_n & b''_n & c''_n \end{pmatrix}$

**Proposition 20 (Fonctions coordonnées)**

Soit  $f : A \rightarrow E$  (avec  $A$  partie d'un espace vectoriel normé  $F$ ). Soit  $a \in \bar{A}$  et soit  $b \in E$ .

On note  $f_1, \dots, f_p$  les fonctions coordonnées de  $f$  et  $(b_1, \dots, b_p)$  les coordonnées de  $b$  dans la base  $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$$

**Exemple 31** Dans  $E = M_2(\mathbb{K})$ , on considère la fonction  $f$  avec  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$

**Proposition 21 (Continuité et coordonnées)**

Soit  $f : A \rightarrow E$  (avec  $A$  partie d'un espace vectoriel normé  $F$ ). Soit  $a$  un point de  $A$ .  
 $f$  est continue en  $a$  si et seulement si chaque fonction coordonnées  $f_k$  est continue en  $a$ .

### VI.3 Fonction continue sur une partie fermée bornée

**Théorème 3 (Extrema d'une fonction numérique sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $A$  une partie fermée bornée de  $E$ .  
Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Remarque 8** Traduire le résultat précédent lorsque  $E = \mathbb{R}$ .

### VI.4 Cas particuliers : fonctions linéaires, polynomiales, multilinéaires

**Théorème 4 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. On suppose  $E$  de dimension finie.  
Toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est lipschitzienne donc continue.

**Théorème 5 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)**

Soient  $E$  et  $F$ , 2 espaces vectoriels normés de dimension finie. Et soit  $G$  un espace vectoriel normé.  
Toute application bilinéaire  $B : E \times F \rightarrow G$  est continue.

**Théorème 6 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)**

Soient  $E_1, \dots, E_p$   $p$  espaces vectoriels. Et soit  $F$  un espace vectoriel. On considère :

$$f : \begin{cases} E_1 \times E_2 \dots \times E_p & \rightarrow F \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{cases}$$

On rappelle que  $f$  est  $p$ -linéaire si pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  et pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $E_1 \times E_2 \dots \times E_p$ , l'application partielle  $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p)$  est une application linéaire de  $E_i$  vers  $F$ .  
Si  $f$  est  $p$ -linéaire et si les  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie, alors  $f$  est continue.

**Proposition 22 (Continuité de l'application déterminant)**

L'application  $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est continue.

**Remarque 9** Conséquence : l'ensemble  $GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Définition 19 (Fonction polynomiale)**

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  est dite polynomiale lorsqu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que l'expression de  $f(x)$  soit un polynôme en les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 23 (Continuité)** Toute fonction polynomiale est continue.