

Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2} \quad \text{et} \quad \|P\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ces 3 quantités sont bien définies et qu'elles définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que pour tout polynôme P , on a $\|P\|_{\infty} \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_1$
3. Etudier pour chacune des 3 normes, la convergence des suites (P_n) et Q_n :

$$P_n = \frac{1}{n}(1 + X + \dots + X^{n-1}) \quad \text{et} \quad Q_n = \sqrt{n}P_n$$
4. Montrer que l'application $P \mapsto P(1)$ est lipschizienne pour la norme $\|\cdot\|_1$.
 L'application $P \mapsto P(1)$ est-elle continue pour $\|\cdot\|_2$? Pour $\|\cdot\|_{\infty}$?

Exercice 2 On considère dans $\mathbb{R}_1[X]$, les normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(aX + b) = |a| + |b| \quad \text{et} \quad N_2(aX + b) = \max_{t \in [0,1]} |at + b|$$

Déterminer les plus petits réels positifs α et β tels que : $N_2 \leq \alpha N_1 \leq \beta N_2$

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N . On note $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées de E . Pour toute suite $(u_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$, on pose $\|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} N(u_n)$.

Montrer que $\|\cdot\|_{\infty}$ est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

Exercice 4

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Puis montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_2(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \times GL_2(\mathbb{K}), \quad \|P^{-1}AP\| = \|A\|$.
3. Généraliser le résultat à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 (CCP) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|e^t dt$.

Montrer que N est une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$?

Exercice 6 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall A \in E$, on pose $\|A\| = \sup_{i \in [1; n]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E . Puis montrer que : $\forall (A, B) \in E^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Exercice 7 Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E . Montrer que son adhérence $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 8 Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

♥**Exercice 9** Représenter dans le plan chacun des ensembles suivants et déterminer ceux qui sont : bornés, ouverts, fermés....

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > a\}$ où a est un réel fixé.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 0\}$
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1\}$
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| > 1 \text{ et } y < 2\}$
5. $A_5 = \mathbb{R} \times]-1, 1]$
6. $A_6 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
7. $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ux + vy + w = 0\}$ où u, v et w sont des réels fixés, tels que $(u, v) \neq (0, 0)$.

Exercice 10 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont fermés ? ouverts ?

$$A_1 = \{x \in E, \|x - a\| \geq 4\} \quad A_2 = \{x \in E, \|x - a\| > 11\}$$

$$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - 3xyz + 8z^3 = 2\}$$

Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]2, 5[$, $[-5, 0[$, $[-3, 1]$ et $[7, +\infty[$.

Exercice 11 On peut aborder cet exercice après avoir fait l'exercice 3.

On se place dans l'espace C des suites réelles bornées, muni de la norme infinie :

$$\forall u \in C, \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

On note a la suite constante égale à 1 et C_0 le sous espace vectoriel de C formé des suites qui tendent vers 0.

Déterminer la distance de a à C_0 .

Rappel : Soit A est une partie non vide d'une espace vectoriel normé. Pour tout x de E , on appelle distance de x à A la quantité $d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$

Indication : On peut considérer la suite a' , suite constante nulle.

Remarquer que $a' \in C_0$ puis justifier que $\forall u \in C_0, \|u - a\|_\infty \geq \|a' - a\|_\infty$. Et enfin conclure....

Exercice 12

1. Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M) = M^T M$.
Montrer que ϕ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 13 On note $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme infinie.

1. Montrer que $f \mapsto \int_0^1 f$ est continue sur E .
2. On note $A = \{f \in E, \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } f(0) = 0\}$.
Montrer que A est une partie fermée non vide et bornée de E .
3. Pour tout f de A , on note $\phi(f) = \int_0^1 f$.
Montrer que ϕ est majorée, mais qu'elle n'atteint pas sa borne supérieure. Commentaire ?

Exercice 14 (CCP) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma = \{(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / AB = BA\}$.

1. Montrer que Γ est fermé dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.
2. Soit $(A, B) \in \Gamma$ tel que $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P$ et $B^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} Q$. Montrer que $P^2 = P, Q^2 = Q$ et $PQ = QP$.

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel normé.

Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E .

Soit H un hyperplan de E . Montrer que H est fermé ou bien dense dans E .

Exercice 16 On considère $p = 2$ ou 3 et on se place dans $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ tel que l'ensemble des points intérieurs à F est non vide. Montrer que $F = E$.

Exercice 17 Montrer que $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 Soit $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable} \right\}$.

Montrer que F est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f' est bornée.

Montrer que le produit de deux fonctions bornées et lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne.

Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ n'est pas toujours lipschitzienne.

Exercice 20 On assimile tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f(x) = X^T A X$

1. Montrer que f est continue.
2. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :
 $\forall X \in S, a \leq f(x) \leq b$ et $\exists (X_1, X_2) \in S^2, f(X_1) = a$ et $f(X_2) = b$
3. On suppose de plus que A est une matrice symétrique.
Préciser a et b en fonction des valeurs propres de A .

Exercice 21 (CCINP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leq \frac{1}{2}$.
En admettant que A est diagonalisable, montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.
3. Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.
4. Montrer que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

Exercice 22 (CCP) Sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit une norme $\| \cdot \|$ en posant, pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, $\|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.
2. Montrer que l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue.
3. Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n \geq 0}$ est bornée.
Montrer que les valeurs propres de A sont de module ≤ 1 .
4. Soit $B \in E$. On suppose que $(B^n)_{n \geq 0}$ converge vers $C \in E$.
Montrer que $C^2 = C$ et que le spectre de C est inclus dans $\{0, 1\}$.
Montrer que les valeurs propres de B sont de module ≤ 1 .
Si λ est une valeur propre de B de module 1, montrer que $\lambda = 1$.

Partie 2 : Exercices d'oral

Exercice 23 Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 24 Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 25 On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 26 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
- (b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

- (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 27 Les questions a. et b. sont indépendantes.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E .

On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
- (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
- (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
- (b) On suppose que A est fermée et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1 - t)y) \leq t d_A(x) + (1 - t) d_A(y).$$

Prouver que A est convexe.