

## I : Compléments sur l'intégration

**1) Suites et séries de fonctions intégrables** Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

**Théorème de convergence dominée** : si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux sur  $I$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et s'il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant  $|f_n| \leq \varphi$  pour tout  $n$ , alors les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et :  $\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$ .

**Théorème d'intégration terme à terme** : si une série  $\sum f_n$  de fonctions intégrables sur  $I$  converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur  $I$ , et si la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $I$  et de plus :  $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$ . On peut rencontrer des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

## 2) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à  $x$  et de domination, sans nécessairement expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à  $t$ .

**Théorème de continuité** : si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

**Théorème de convergence dominée à paramètre continu** : si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  une borne de  $A$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors  $\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$ .

**Théorème de dérivation** : si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et vérifie :  $\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ .

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  et d'intégrabilité des  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  pour  $0 \leq j < k$ .

**Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre** : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

## II : Couples et vecteurs de variables aléatoires, inégalités probabilistes.

**Couple de variables aléatoires discrètes.** Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation  $P(X = x, Y = y)$ . Loi conjointe, lois marginales. Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

Loi conditionnelle de  $Y$  sachant un événement  $A$ .

**Variables aléatoires indépendantes** : Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  sont indépendantes si, pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants. Notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .

De façon équivalente, la distribution de probabilités de  $(X, Y)$  est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \text{ lorsque } X \perp\!\!\!\perp Y.$$

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Fonctions de variables indépendantes : si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ . Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

**Rappel de la formule de transfert :**  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable.

Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

Pour  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors  $XY$  est d'espérance finie et :  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires.

**Inégalité de Cauchy-Schwarz :** si  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie, alors  $XY$  l'est aussi et :  $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$  Cas d'égalité.

**Covariance de deux variables aléatoires.** Relation  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ , cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

**Inégalités probabilistes** Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Loi faible des grands nombres :** si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant  $S_n =$

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ et } m = E(X_1), \text{ pour tout } \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Les étudiants doivent savoir retrouver, avec } \sigma = \sigma(X_1) : P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

### III : Questions de cours

1. Théorème de convergence dominée (pour les suites d'intégrales) (énoncé)
2. Théorème d'intégration terme à terme (pour les intégrales de séries de fonctions) (énoncé)
3. Continuité de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  (énoncé) ou Dérivabilité de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  (énoncé) ou Caractère  $C^k$  de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  (énoncé)
4. Variance d'une somme de variables aléatoires. (dem)
5. Fonction génératrice d'une somme de 2 var indépendantes (dem)
6. Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ , **indépendantes**. Alors  $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$  (dem)
7. Soit  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ , **indépendantes**. Alors  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$  (dem)
8. Inégalité de Markov, Tchebychev (dem)
9. Loi faible des grands nombres (dem)