

Exercice 1 On considère la fonction définie par :

$$\forall t \in]-1, 0], \quad f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, 1[, \quad f(t) = (t^2 \sin(\frac{1}{t}), t^2 \cos(\frac{1}{t}))$$

Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[$. f est-elle deux fois dérivable sur $] -1, 1[$?

Exercice 2 Soient f et g définies sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que pour tout réel $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Comment choisir la constante A pour que la fonction h définie par $h(x) = f(x) - Ag(x)$ vérifie $h(a) = h(b)$?
2. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 3 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(t)| \leq n!$.

Exercice 5 Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout réel t , la matrice $P(t)$ est telle que $(P(t))^T \times P(t) = I$.

Montrer que pour tout réel t , la matrice $(P(t))^T \times P'(t)$ est antisymétrique.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Soit f une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans E , deux fois dérivable sur I et telle que la fonction $\|f\|$ est constante.

Montrer que le produit scalaire $\langle f(t); f''(t) \rangle$ est négatif pour tout $t \in I$.

Exercice 7 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$).

$\forall t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \det(Id + tu)$

Montrer que f est dérivable en 0, puis calculer $f'(0)$.

Exercice 8 On note Det le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

f, g, h et k désignent des applications de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On note $\phi = \det(f, g)$. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur I et calculer ϕ' .
2. On pose $F = \langle f, \det(g, h)k \rangle$. Montrer que F est de classe C^1 sur I et calculer F' .

Exercice 9 Calcul de déterminants par dérivation : cet exercice comporte TROIS questions.

$$1. \text{ Pour tout } x \text{ réel, } A(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}, \quad B(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x^2 & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{2}{x^3} & \frac{x^2}{2} & x & 1 & \ddots & 0 \\ 6 & \frac{2}{2} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$$

Montrer que D_n est de classe C^1 et calculer D'_n .
En déduire D_n .

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & x+1 \end{vmatrix}$

Exercice 10 Résolution de systèmes différentiels :

On cherche les fonctions $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ qui vérifient pour tout réel t :

$$S \quad \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) + 3z(t) \\ y'(t) &= 2y(t) \\ z'(t) &= x(t) \end{cases}$$

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

1. Ecrire le système différentiel sous la forme $X' = AX$, où A est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Construire une matrice P inversible de taille 3, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On pose $X = PY$ avec $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Quel est le système différentiel vérifié par Y ?
4. Expliciter $Y(t)$ pour tout réel t .
5. En déduire les solutions du système S .

Exercice 11 En s'inspirant de l'exercice précédent, résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$