I Rappels d'arithmétique élémentaire

Définition 1 Soit n et m deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel p tel que $n = mp$, on dit que n est un **multiple** de m et que m est un **diviseur** de n.

Théorème 1 Division euclidienne. Soit n et m deux entiers naturels avec m **non nul**.
Alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tel que : $\begin{cases} n = qm + r \\ r < m \end{cases}$

Proposition 1 Soient n et m deux entiers naturels **non nuls**. Alors :

- l'ensemble des **diviseurs communs** de n et m admet un plus grand élément appelé PGCD (plus grand commun diviseur) de n et m.
- l'ensemble des **multiples communs** de n et m admet un plus petit élément appelé PPCM (plus petit commun multiple) de n et m.

Remarque 1 Voir algorithme d'Euclide.

Définition 2 Un entier naturel $n \geq 2$ est dit **premier** si ses seuls diviseurs sont 1 et n.

Théorème 2 Décomposition en facteurs premiers.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors il existe une unique décomposition de n en **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition s'écrit :

$$n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{\alpha_k}$$

où pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, p_k est un entier premier, et α_k est un entier naturel non nul.

Remarque 2 Voir crible d'Eratosthène.

II Dénombrements

Définition 3 Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A est appelé **cardinal** de A.
On peut le noter $|A|$ ou bien $\mathrm{Card}(A)$ ou bien $\#A$.

Proposition 2 Soit E un ensemble de cardinal n. Soit F un **sous-ensemble** (ou **partie**) de E. Alors :

- $\mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card(E)}$
- $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E) \iff F = E$

Proposition 3 Soient E et F deux ensembles finis de même cardinaux et $f : E \to F$ une application. Alors :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Proposition 4 Soient E un ensemble fini et F, G deux sous-ensembles (ou parties) de E. Alors :

- si F et G sont **disjoints** alors $\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G)$
- de manière générale, $\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(F \cap G)$
- on note $E \setminus F$ le **complémentaire** de F dans E. Alors $\mathrm{Card}(E \setminus F) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(F)$.

Proposition 5 Soient E et F deux ensembles finis. Notons $E \times F$ le **produit cartésien** de E et de F. Alors :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$$

Proposition 6 Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card}(E) = p$ et $\text{Card}(F) = n$.
Notons $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des **applications** de E dans F. Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{A}(E, F)) = n^p$$

Proposition 7 Soit E un ensemble fini de carninal n. On note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de E. Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Proposition 8 Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier naturel non nul.

a) les éléments de E^p sont appelés des p**-uplets** (ou des p**-listes**) d'éléménts de E. On a alors :

$$\text{Card}(E^p) = n^p$$

b) le nombre de p**-listes** (ou p-uplets) d'éléments **distincts** de E est égal à :

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$$

Proposition 9 Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card}(E) = p$ et $\text{Card}(F) = n$.

Le nombre d'applications **injectives** de E dans F est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 4 Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **permutation** de E une bijection de E dans E.

Corollaire 1 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Définition 5 Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier naturel.
Une partie (ou sous-ensemble) de E à p éléments est appelée une p**-combinaison** de E.

Proposition 10 Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier naturel.

Le nombre de p-combinaisons de E est égal à $\displaystyle\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$

Remarque 3 On retrouve notamment les formules de **Pascal** et du **binôme de Newton**.

- Formule du triangle de Pascal : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ pour $n \neq 0$ et $p \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$.
- Formule du binôme de Newton : $\forall (a, b) \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Et enfin $\text{card}\left(\mathcal{P}\left(E_n\right)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Conclusion : Si on veut dénombrer un ensemble fini E,

1. On peut reconnaître des p-listes, des arrangements, des combinaisons, des permutations...
2. On peut scinder E en plusieurs parties disjointes.
3. On peut dénombrer le complémentaire.
4. On peut détailler les étapes qui permettraient décrire tous les éléments de E, en comptant le nombre de choix possibles à chaque étape. Cela revient « moralement » à construire un arbre.