**Définition 1 Définitions principales.**
Soit $\Omega$ un univers fini. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des **parties** de $\Omega$.

1. Un événement $A$ est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Soit $A$ un événement. L'événement contraire de $A$ est noté $\overline{A}$, il s'agit de $\Omega \setminus A$.
3. Deux événements $A$ et $B$ sont dit incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
4. Une probabilité $P$ sur $\Omega$ est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
   - $P(\Omega) = 1$
   - pour tous événements incompatibles $A$ et $B$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. Un espace probabilisé fini est un couple $(\Omega, P)$ où $\Omega$ est un univers fini et $P$ une probabilité sur $\Omega$.

**Remarque 1** Une probabilité sur $\Omega$ est entièrement définie par les images des singletons.

**Définition 2** Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** si :

- $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

**Définition 3** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini. On dit que la probabilité $P$ est uniforme, ou qu'il y a **équiprobabilité** si les singletons de $\mathcal{P}(\Omega)$ ont tous la même probabilité, c'est-à-dire :

$$\exists p \in [0,1] \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p$$

**Proposition 1** Si $\Omega$ est un ensemble fini muni de la probabilité uniforme, alors :

$$\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

De plus, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

**Proposition 2** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini.

1. Soit $A$ un événement. Alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Soient $A$ et $B$ deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. **Croissance** : soient $A$ et $B$ deux événements tels que $A \subset B$. Alors $P(A) \leq P(B)$.
   (On dit alors que l'événement $A$ implique l'événement $B$.)

**Définition 4** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et soit $B$ un événement de probabilité **non nulle**.
On définit la probabilité conditionnelle sachant B , notée $P_B$ par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Alors $P_B$ est une **probabilité** sur $\Omega$.

**Remarque 2**
1. La probabilité $P_B(A)$ est parfois notée $P(A|B)$.
   Elle est appelée **probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$**.
2. $A|B$ n'a aucun sens. En particulier ce n'est pas un événement.

**Proposition 3** **Probabilités composées**
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, P)$ tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**Proposition 4** **Probabilités totales**. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un **système complet d'événements**. Alors :

$$\text{pour tout événement } B \text{ on a : } P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$$

Si de plus les événements $A_1, \dots, A_n$ ont tous une probabilité **non nulle**, alors : $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

**Proposition 5** **Formules de Bayes**

1. Soit $A$ et $B$ deux événements de probabilités **non nulles**. Alors : $P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.
2. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un **système complet d'événements** avec $A_1, \dots, A_n$ tous de probabilités **non nulles**. Alors pour tout événement $B$ de probabilité **non nulle** et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ :

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)}$$

**Remarque 3** Ces formules ne sont que des prolongations des formules des probabilités conditionnelles et des probabilités totales.

**Définition 5** Deux événéments $A$ et $B$ sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

**Proposition 6** Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P_B(A) = P(A).$$

**Définition 6** Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tous entiers $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ on a : $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$

**Remarque 4** Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

Réciproque fausse : des événements peuvent être 2 à 2 indépendants mais sans être mutuellement indépendants !

**Définition 7** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini et $E$ un ensemble.

- Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est appellée **variable aléatoire** sur $\Omega$.
  En général $E \subset \mathbb{R}$ et on parle alors de variable aléatoire **réelle**. (je noterai en abrégé : V.A.R.)
- L'application $P_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & E \\ x & \longrightarrow & P([X = x]) \end{array} \right.$ est la **loi de probabilité** de $X$.

**Proposition 7** Soit $X$ une V.A.R. Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $([X = x_1], \dots, [X = x_n])$ est un **système complet d'événements** et en particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P([X = x_k]) = 1$.

**Remarque 5**
1. On notera parfois $P(X = x)$ au lieu de $P([X = x])$.
2. Soit $A$ une partie de $E$. L'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

**Définition 8** Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires.

1. On appelle loi conjointe du couple $(X,Y)$ la loi du couple $(X,Y)$.
2. On appelle lois marginales du couple $(X,Y)$ les lois de $X$ et de $Y$.
3. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x) \neq 0$. La loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X=x]$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P_{[X=x]}(Y=y) = \frac{P(Y=y \cap X=x)}{P(X=x)}.$$

**Définition 9** Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires.

1. On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P([X=x] \cap [Y=y]) = P([X=x])\,P([Y=y]).$$

2. Si $X$ et $Y$ sont **indépendantes** alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a :

$$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A)\,P(Y \in B).$$

3. Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\right) = P([X_1 = x_1]) \times \dots \times P([X_n = x_n])$$

4. Si $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** alors :
pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

**Remarque 6** La propriété 4 est formelle à écrire mais facile à comprendre et relève du bon sens.

**Proposition 8** Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires **indépendantes**, et si $f$ et $g$ sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

**Remarque 7** Également valable pour $n$ variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et $n$ fonctions $f_1, \dots, f_n$.

**Définition 10** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini** $(\Omega, P)$.
On appelle **espérance** de $X$ le réel : $E(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X=k)$.

**Remarque 8**

1. On a également : $E(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.
2. Si $X$ est une variable aléatoire **constante** égale à $x_0$ alors $E(X) = x_0$.
3. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $X$ la variable aléatoire indicatrice de $A$, c'est-à-dire $X\ :\ \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \\ X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$ .
   Alors $E(X) = P(A)$.

**Proposition 9**

1. **Linéarité**. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

2. **Croissance**. Soit $X$ et $Y$ deux V.A.R. telles que $X \leq Y$ (c'est-à-dire $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$).

$$\text{Alors } E(X) \leq E(Y).$$

**Remarque 9**

1. Si $X$ est une variable aléatoire **positive** alors $E(X) \geq 0$.

2. On a donc $E(X+\lambda Y) = E(X) + \lambda\, E(Y)$.

**Théorème 1 Transfert**. Soit $X$ une variable aléatoire et $f$ une application définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\, f(x).$$

**Proposition 10** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors : : $E(XY) = E(X)\, E(Y)$.

**Définition 11** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini**.
On appelle **variance** de $X$ : $V(X) = E\Big((X-E(X))^2\Big)$.
On appelle **écart-type** de $X$ : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

**Proposition 11** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé **fini**.

1. On a alors :
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors :
$$V(aX+b) = a^2\, V(X).$$

**Proposition 12 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.
Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant une **espérance** $\mu$ et une **variance** $\sigma^2$. On a alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\left(\Big[|X-\mu| \geq \epsilon\Big]\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

**Remarque 10** Interprétation de la **dispersion** en fonction de la variance.

**Proposition 13 Lois usuelles**

1. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $E$. (En général $E\subset\mathbb{R}$ ou $E = [\![1,n]\!]$).
On dit que $X$ suit la **loi uniforme** sur $E$ si : $\forall x\in E,\ P(X=x) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(E)}$.

   Dans le cas d'une variable aléatoire **réelle**, notons $E = \{x_1,\dots,x_n\}$. On a alors : $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}$.
2. Soit $p\in]0,1[$. Une variable aléatoire $X$ suit la **loi de Bernouilli de paramètre $p$** si :
$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ P(X=1) = p \end{cases}$$
   On notera alors $X\sim\mathcal{B}(p)$. Par ailleurs : $\boxed{E(X) = p}$ et $\boxed{V(X) = p\,(1-p)}$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. Une variable aléatoire $X$ sur la **loi binomiale** de paramètres $(n,p)$ si :
$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$
   On notera alors $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. Par ailleurs : $\boxed{E(X) = n\,p}$ et $\boxed{V(X) = n\,p\,(1-p)}$.

**Proposition 14** Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant chacune la loi de **Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

**Remarque 11** Pour reconnaître une V.A.R. binomiale, on peut aussi reconnaître son schéma théorique : répétition de $n$ épreuves de Bernoulli **indépendantes** et **de même paramètre** $p$, et $X$ = nombre de succès (ou de 1) obtenus au cours des $n$ épreuves.