

# NOM :

Aucune démonstration n'est demandée.

1. Enoncer le théorème fondamental de l'intégration.
2. Enoncer le théorème de dérivabilité de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$
3. Donner la définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un couple de variables aléatoires.
4. Enoncer l'inégalité de Markov.
5. Enoncer la loi faible des grands nombres.

1] Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  - Soit  $a \in I$   
Soit  $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

Alors  $g$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .  
Ainsi  $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  et  $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$

2] Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : (x, t) \in I \times J \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ .

on suppose que :

- $\forall x \in I, (t \mapsto f(x, t))$  est intégrable sur  $J$
- $\forall t \in J, (x \mapsto f(x, t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$
- $\forall x \in J, (t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t))$  est continue par morceaux sur  $J$

Il existe une fonction  $\phi$  intégrable sur  $J$   
telle que :  $\forall (x, t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \phi(t)$

Alors  $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et de plus, sa dérivée est  $\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

3] Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes.

La loi conjointe de  $V = (X, Y)$  est la donnée de :

$V(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$  et de  $\{P(X=x, Y=y)\}$  pour tout  $(x, y) \in V(\Omega)$

les lois marginales sont les lois de  $X$  et de  $Y$ , c'est à dire  $X(\Omega)$  et  $P(X=x)$  pour  $x \in X(\Omega)$  et de même pour  $Y$ .

4] Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  admettant une espérance - Alors  $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$  pour tout  $a > 0$ .

5] Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d, admettant une espérance  $m$  et une variance  $\sigma^2$  - Alors  $P(|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} - m| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

# NOM:

Aucune démonstration n'est demandée.

1. Enoncer le théorème de convergence dominée.
2. Enoncer le théorème de continuité de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$
3. Enoncer le théorème donnant la variance d'une somme de variables aléatoires.
4. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire.
5. Enoncer le lemme des coalitions.

1 Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$ .

On suppose que :

- $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ , continue par morceaux
- $\exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  intégrable, telle que  $\forall n, |f_n| \leq \varphi$

Alors  $\forall n, f_n$  et  $f$  sont intégrables.

De plus 
$$\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt$$

2 Soit  $f: (x, t) \in I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $J$
- $\forall t \in J, x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $I$
- il existe  $\varphi$  intégrable sur  $J$  telle que  $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors  $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$  est continue sur  $I$

3 Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles admettant une espérance et une variance.

Alors  $V(\sum_{i=1}^n X_i)$  existe et  $V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

4 Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$

On appelle fonction génératrice de  $X$  la fonction définie par  $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) t^k$  pour  $t \in \mathbb{R}$

N.B.  $[-1, 1] \subset \mathcal{D}_{G_X}$

5 Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes.  
Soit  $f: X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: X_{n+1}(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$   
ou  $m \in [2, n-1]$ . Alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes

**NOM :****Aucune démonstration n'est demandée.**

1. Enoncer le théorème fondamental de l'intégration.
2. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales sur un intervalle quelconque.
3. Donner la définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un couple de variables aléatoires.
4. Enoncer le théorème donnant la fonction génératrice d'une somme de 2 var indépendantes.
5. Enoncer l'inégalité de Tchebychev. (ou Bienaymé-Tchebychev)

1 Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  où  $I$  est un intervalle - Soit  $a \in I$ .  
 Soit  $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  -  
 Alors  $F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$   
 Ainsi  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F' = f$  -

2 Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables sur  $I$  -  
 On suppose que  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ ,  
 et que  $S$  est continue par morceaux sur  $I$   
 On suppose de plus que  $\sum \int |f_n|$  converge -  
 Alors  $S$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_I S(t) dt = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$

3 Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires -  
 La loi conjointe du couple  $V = (X, Y)$  est la donnée  
 de  $V(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$  et de  $\{P(X=x, Y=y) \text{ pour tout } (x, y) \in V(\Omega)\}$   
 Les lois marginales du couple sont les lois de  $X$   
 et de  $Y$ , c'est à dire la donnée de  
 $X(\Omega)$  et  $P(X=x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ , et idem pour  $Y$  -

4 Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$   
 On suppose que  $X \perp Y$  - On note  $R_X$  le rayon de  
 convergence de  $G_X$ , série génératrice de  $X$  (et idem pour  
 $Y$ ) - Alors  $G_{X+Y}$  a un rayon de convergence  $R \geq \min(R_X, R_Y)$   
 et de plus  $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$

5 Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant une espérance et  
 une variance - Alors ;  $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

**NOM:**

1. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales sur un intervalle quelconque.
2. Enoncer le théorème de continuité de  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$
3. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire.
4. Enoncer l'inégalité de Tchebychev. (ou Bienky-Mé-Tchebychev)
5. Enoncer le lemme des coalitions.

1] Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues par morceaux sur  $I$ , et intégrables sur  $I$ .

on suppose que :

•  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$ , continue par morceaux sur  $I$ .

•  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

Alors  $S$  est intégrable et  $\int_I S(t) dt = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt$

2] Soit  $f: (x, t) \in I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$   
on suppose que :

•  $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $J$

•  $\forall t \in J, x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $I$

• il existe  $p$  intégrable sur  $J$  telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq p(t)$$

Alors  $(x \mapsto \int_J f(x, t) dt)$  est continue sur  $I$

3] Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs entières  
la fonction génératrice de  $X$  est définie par :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) t^k = E(t^X)$$

4] Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une espérance et une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

5] Soient  $X_1, \dots, X_m$  des variables aléatoires indépendantes.

Soit  $m \in [2, m-1]$ , et  $f: X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \rightarrow E$

$g: X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow F$

Alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.