

I : Couples et vecteurs de variables aléatoires, inégalités probabilistes : voir le programme précédent.**II : Révisions sur réduction des endomorphismes et des matrices carrées**

Les théorèmes doivent être connus. Tout exercice portant exclusivement sur ce chapitre peut être posé cette semaine.

III : Espaces vectoriels normés

a) Normes Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.

Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.

Partie convexe. Convexité des boules. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

c) Comparaison des normes Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé

Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.

Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.

Point adhérent à une partie, adhérence. Partie dense. L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

e) Limite et continuité en un point Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Opérations algébriques, composition.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie. La démonstration est hors programme.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Théorème des bornes atteintes (admis) : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

IV : Questions de cours

1. Variance d'une somme de variables aléatoires. (dem)
2. Fonction génératrice d'une somme de 2 var indépendantes (dem)
3. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, **indépendantes**. Alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$ (dem)
4. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, **indépendantes**. Alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ (dem)
5. Inégalité de Markov, Tchebychev (dem)
6. Loi faible des grands nombres (dem)
7. Définition de la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé.
8. Définition de 2 normes équivalentes
9. Propriétés sur les intersections / réunions d'ouverts, fermés (dem)
10. Adhérence, Intérieur, partie dense (définitions)
11. Caractérisation séquentielle de l'adhérence (dem)
12. Partie convexe définition
13. Image réciproque d'un ouvert/fermé par une fonction continue (énonce)
14. Equivalence des normes en dimension finie (énoncé)
15. Extrema d'une fonction à valeurs réelles, continue sur un fermé borné (énoncé)
16. Continuité des applications linéaires en dim finie (dem)
17. Continuité des applications bilinéaires (énoncé)