

Table des matières

I	Extrait du programme de PCSI	1
II	Applications partielles, continuité	2
III	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	2
III.1	Dérivées partielles	2
III.2	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	3
III.3	Théorème fondamental	4
III.4	Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	4
III.5	Dérivée selon un vecteur	5
IV	Différentielle	6
IV.1	Différentielle en un point	6
IV.2	Règle de la chaîne	7
IV.2.a	Dérivation de $t \rightarrow f(x_1(t), \dots, x_p(t))$	7
IV.2.b	Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe	7
IV.2.c	Application aux changements de variables	7
V	Fonction de classe $\mathcal{C}^2$	9
V.1	Dérivées partielles d'ordre 2	9
V.2	La classe $\mathcal{C}^2$	9
V.3	Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$	9
V.4	Théorème de Schwarz	10
V.5	Matrice hessienne, formule de Taylor à l'ordre 2	10
VI	Extrema	11
VI.1	Définitions	11
VI.2	Extremum pour une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert	11
VI.3	Extrema d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et Hessienne	11
VI.4	Plan de recherche d'extrema d'une fonction f	12
VII	Exemples d'équations aux dérivées partielles	13
VII.1	Deux exemples fondamentaux	13
VII.2	Utilisation de changement de variables	13

I Extrait du programme de PCSI

Il est à relire !

Certaines choses ne seront pas du tout revues en cours (elle le seront *éventuellement* en TD).

II Applications partielles, continuité

Définition 1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

La j -ème application partielle de f en a est l'application $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, \underbrace{a_j + t}_{\text{variable}}, a_{j+1}, \dots, a_p)$.

Proposition 1 (Continuité de f et continuité des applications partielles) (dem)

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est continue sur $\mathbb{R}^p$, alors toutes ses applications partielles sont continues.
- La réciproque est fautive.

Exemple 1 $\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$

Exemple 2 Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$, la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} ?$$

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

III.1 Dérivées partielles

L'application $t \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_p)$ est la j -ème application partielle en $a = (a_1, \dots, a_p)$.

Définition 2 (Dérivée partielle en un point)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de U et j un entier de $\{1, \dots, p\}$.

f admet une dérivée partielle par rapport à la j -ème variable, au point a si la j -ème application partielle est dérivable en 0 :

$$\text{On a alors : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_p) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j -ème variable en tout point de U , alors on peut définir

$$\text{la } j\text{-ème dérivée partielle } \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \partial_j f(x) \end{cases}$$

Exemple 3 Expliciter les dérivées partielles de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2) \end{cases}$

Exemple 4 Expliciter les dérivées partielles de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x^3 + 2x^4y^3 + 5yz^2 \end{cases}$

Exemple 5 On reprend l'exemple 1 : $\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$
 f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

Proposition 2 (Premières propriétés) Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. On note $a \in U$ et $j \in \{1, \dots, p\}$

On suppose que f et g admettent des dérivées partielles par rapport à x_j au point a .

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions λf et $f + g$ ont des dérivées partielles par rapport à x_j en a :

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_j}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(f + g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$

- Le produit $f \times g$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a et :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times g(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) \times f(a)$$

- Si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I , avec $f(U) \subset I$, alors $\phi \circ f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a :

$$\frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \phi'(f(a)) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

- Si f ne s'annule pas en a , alors $\frac{1}{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a :

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = \frac{-1}{f(a)^2} \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

III.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et **continues** sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1 • Toute fonction constante est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Tout projecteur $\pi_k : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto x_k \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute application linéaire $u : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_p x_p \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Définition 4 (Généralisation) $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si toutes ses applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6 la norme euclidienne usuelle est-elle une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$?

Définition 5 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Le gradient de f en a est le vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\nabla f(a)$ ou (ou encore $\text{grad}(f)(a)$) défini par :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a))$$

Exemple 7 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^3 e^y + \ln(1 + y^4 + z^2)$. Expliciter le gradient de f en $(0, 0, 0)$.

III.3 Théorème fondamental

Proposition 3 (Théorème fondamental du calcul différentiel) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U de $\mathbb{R}^p$ et soit $a \in U$.

Alors, au voisinage de 0, c'est-à-dire, lorsque $h = (h_1, \dots, h_p)$ est proche de $0_{\mathbb{R}^p}$ on a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)$$

Définition 6 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

On dit que f a un développement limité d'ordre 1 en $a \in U$ lorsque

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ et } r > 0 \text{ tels que, pour } h \in B(0, r), f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k h_k \right) + o(\|h\|).$$

Proposition 4 D'après le théorème fondamental, si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors f admet en tout $a \in U$ un développement limité de la forme

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|)$$

.

$$\text{ou encore : } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

Exemple 8 Donner un développement limité de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xy \cos(z) - y^2 z$ au voisinage de $a = (1, 2, \pi)$

Proposition 5 (Caractère $\mathcal{C}^1$ et continuité. (dem)) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U , alors f est continue.

III.4 Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- Combinaison linéaire

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors toute combinaison linéaire de f et g appartient aussi à $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

- Produit Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors le produit fg est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Conséquence : toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Composition

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si $\phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec $f(U) \subset I$, alors $\phi \circ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

- Inverse et quotient

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si f ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Conséquence : toute fraction rationnelle (quotient de 2 fonctions polynomiales) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

III.5 Dérivée selon un vecteur

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de U .

$\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Soit $v \in \mathbb{R}^p$, non nul.

Alors pour $|t| < \frac{r}{\|v\|}$, on peut dire que $a + tv \in B(a, r)$ et donc $f(a + tv)$ est bien défini.

Nous avons justifié que : quel que soit le vecteur $v \in \mathbb{R}^p$, l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est définie au voisinage de 0.

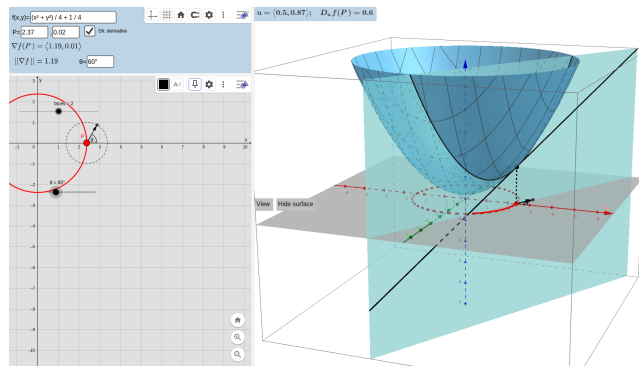
Définition 7 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de U et soit $v \in \mathbb{R}^p$.

Lorsque la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on note $D_v f(a)$ cette dérivée en 0, que l'on appelle **la dérivée en a selon le vecteur v** .

Exemple 9 On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1 + x^2 + y^2}{4}$.

On se donne un vecteur $v = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et un point $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de f en P selon le vecteur v .



Proposition 6 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $a \in U$, la fonction f admet en a une dérivée selon le vecteur v . De plus :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Remarque 2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle \nabla f(a), h \rangle \leq \|\nabla f(a)\|$ pour h unitaire ; avec égalité si et seulement si h et $\nabla f(a)$ sont colinéaires et de même sens.

Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

IV Différentielle

IV.1 Différentielle en un point

Définition 8 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

- On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telle que :

$$f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + u(h) + o(\|h\|).$$

Dans ce cas, l'application linéaire u est appelée la différentielle de f en a , et sera notée $df(a)$. Ainsi, on écrira :

$$f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|)$$

$$\text{ou encore : } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + df(a) \cdot (x-a) + o(\|x-a\|)$$

- Lorsque f est différentiable en tout point de U , on appelle **différentielle de f** l'application

$$df : \begin{cases} U & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto df(a) \end{cases}$$

Théorème 1 Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U , alors f est différentiable en tout point $a \in U$. La différentielle de f en a est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, \dots, h_p) & \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \times \partial_j f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle \end{cases}$$

Notation : pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, on note $df(a)(h) = df(a) \cdot h$

Exemple 10 $\pi_k : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto x_k \end{cases}$

Déterminer la différentielle de π_k en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 11 On considère la forme linéaire $u : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \sum_{j=1}^p b_j x_j \end{cases}$

Déterminer la différentielle de u en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 12 On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \sum_{j=1}^p b_j x_j^2 \end{cases}$

Déterminer la différentielle de u en un point a de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 7 (Calculs de différentielles) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et soit λ et μ deux réels.

- Combinaison linéaire** : $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$
- Produit** : $d(f \times g)(a) = f(a) \times dg(a) + g(a) \times df(a)$
- Inverse** : si $f(a) \neq 0$, alors $d(1/f)(a) = -\frac{df(a)}{f(a)^2}$
- Composition** : si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(U) \subset I$, alors $d(\phi \circ f)(a) = \phi'(f(a)) \times df(a)$

IV.2 Règle de la chaine

IV.2.a Dérivation de $t \rightarrow f(x_1(t), \dots, x_p(t))$

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On considère $\Phi : t \in I \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$ une fonction vectorielle **de la variable réelle** telle que :

$$\forall t \in I, \Phi(t) \in U$$

On étudie la dérivée de $t \rightarrow f(x_1(t), \dots, x_p(t))$

Proposition 8 (Règle de la chaine. (dem))

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ et soit $\Phi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Phi(I) \subset U$.

Alors $g = f \circ \Phi : t \mapsto g(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \sum_{k=1}^p x'_k(t) \times \partial_k f(\Phi(t))$$

Autrement dit : $\forall t \in I, \quad \frac{d(f \circ \phi)}{dt} = \langle \phi'(t), \nabla f(\phi(t)) \rangle.$

Exemple 13 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Expliciter la dérivée de $t \mapsto f(t^2, 7 \ln(1+t^2), e^t)$ en fonction des dérivées partielles de f .

IV.2.b Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe

Proposition 9 ((dem)) Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction f est constante si et seulement si ses dérivées partielles sont toutes nulles.

IV.2.c Application aux changements de variables

L'objectif de ce paragraphe est le calcul des dérivées partielles de

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)).$$

Cas de deux variables Dans un premier temps : on se donne

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) \quad \text{et} \quad \phi : (u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)).$$

On suppose ces deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Et l'on cherche à calculer les dérivées partielles de

$$(u, v) \mapsto H(u, v) = f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)).$$

Rappelons que les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles :

$$\partial_1 H(u_0, v_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(u_0 + t, v_0) - H(u_0, v_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow u_0} \frac{H(t, v_0) - H(u_0, v_0)}{t - u_0} = \frac{d(f(\phi_1(t, v_0), \phi_2(t, v_0)))}{dt}(u_0).$$

On utilise donc la règle de la chaîne pour dériver la fonction $(t \mapsto f(\phi_1(t, v_0), \phi_2(t, v_0)))$

On obtient alors :

De même : pour calculer $\partial_2 H(u_0, v_0)$ on dérive la fonction $t \mapsto$

Conclusion : Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\phi : (u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f \circ \phi$ est bien définie, alors $H = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de plus

$$\begin{cases} \partial_1(H)(u, v) = \partial_1(f \circ \phi)(u, v) = \partial_1(\phi_1) \cdot \partial_1(f) \circ \phi + \partial_1(\phi_2) \cdot \partial_2(f) \circ \phi \\ \partial_2(H)(u, v) = \partial_2(f \circ \phi)(u, v) = \partial_2(\phi_1) \cdot \partial_1(f) \circ \phi + \partial_2(\phi_2) \cdot \partial_2(f) \circ \phi \end{cases}$$

Exemple 14 Changement de variables affines.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$$

$$\text{On pose le changement de variable } \begin{cases} x &= au + bv + x_0 \\ y &= cu + dv + y_0 \end{cases}$$

Ce changement de variable est bijectif si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible. On suppose que c'est le cas.

On note $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, (au + bv + x_0, cu + dv + y_0) \in U\}$ et pour tout $(u, v) \in V$, on peut poser $g(u, v) = f(au + bv + x_0, cu + dv + y_0)$

Déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f

Exemple 15 Coordonnées polaires.

Cette fois ci, on pose le changement de variables :

$$\begin{cases} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{cases} \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. On note $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$
Expliciter les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
2. Calculer $\nabla(f)(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g (calcul du gradient en coordonnées polaires).

Cas de n variables De la même manière, se donne :

- $\phi : (u_1, \dots, u_n) \mapsto (\phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_n))$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$
- $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V \subset \mathbb{R}^n$
- on suppose $\phi(U) \subset V$

Alors la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :

$$\partial_i(g) = \sum_{k=1}^n \partial_i(\phi_k) \cdot \partial_k(f) \circ \phi$$

$$\partial_i(g)(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n \partial_i(\phi_k)(u_1, \dots, u_n) \cdot \partial_k(f)(\phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_n))$$

V Fonction de classe $\mathcal{C}^2$

V.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$

Les dérivées partielles d'ordre 1, lorsqu'elles existent en tout point de U sont des applications de U dans $\mathbb{R}$, on peut alors étudier leurs dérivées partielles.

Définition 9 (Dérivées partielles d'ordre 2) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_i(\partial_j f)$ est appelée dérivée partielle de f selon les indices (i, j) et notée $\partial_{i,j}^2 f$ ou aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

On appelle dérivée partielle d'ordre 2, une dérivée partielle par rapport à un couple d'indice.

Exemple 16 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 y - 5e^{xy} + \ln(1 + x^4)$

Expliciter les dérivées partielles d'ordre 2 de f .

V.2 La classe $\mathcal{C}^2$

Définition 10 Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U .

On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U vers $\mathbb{R}$.

Exemple 17 Toute fonction constante de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemple 18 $\pi_k : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto x_k \end{cases}$

Vérifier que π_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 10 $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$

V.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Proposition 11 (Combinaison linéaire, produit et inverse) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f + g$ est $\mathcal{C}^2$ sur U .
- la fonction $f \times g$ est $\mathcal{C}^2$ sur U .
- si f ne s'annule pas sur U , la fonction $\frac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^2$ sur U .

Remarque 3 Conséquences :

- $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- Les fonctions polynomiales sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert où elles sont définies.

Proposition 12 (Composition) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $g : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (u_1, \dots, u_q) & \mapsto (g_1(u_1, \dots, u_q), \dots, g_p(u_1, \dots, u_q)) \end{cases}$

On suppose que chaque fonction g_i est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $g(U) \subset V$,

alors la fonction $f \circ g : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_q) & \mapsto f(g_1(u_1, \dots, u_q), \dots, g_p(u_1, \dots, u_q)) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^2$ sur U .

Exemple 19 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = f(2x + 3y, xy)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, en fonction de celles de f .

V.4 Théorème de Schwarz

Proposition 13 (Théorème de Schwarz (admis)) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque 4 L'existence des dérivées partielles croisées ne suffit pas pour démontrer qu'elles sont égales :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Conclusion ?

V.5 Matrice hessienne, formule de Taylor à l'ordre 2

Définition 11 (Matrice hessienne) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$.

La matrice Hessienne de f en a est la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2}$

Le théorème de Schwarz entraîne que $H_f(a)$ est une matrice symétrique de $M_p(\mathbb{R})$.

Exemple 20 Ecrire la hessienne de f en a pour :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$ avec $a = (0, 0)$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + xyz$ en (a, b, c) .

Proposition 14 (Formule de Taylor-Young. (admis)) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $(a + h) \in U$. Alors, lorsque $h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}$, on a :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} H^T H_f(a) H + o(\|h\|^2)$$

en détaillant :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \right) + o(\|h\|^2)$$

Exemple 21 Ecrire la formule de Taylor-Young pour chacune des deux fonctions de l'exemple précédent.

VI Extrema

VI.1 Définitions

Définition 12 (Extremum global) Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec A partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.
 f admet un minimum global en a si $\forall x \in A, f(x) \geq f(a)$
 f admet un maximum global en a si $\forall x \in A, f(x) \leq f(a)$

Définition 13 (Extremum local) Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec A partie de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.
 f admet un minimum (resp. maximum) local en a s'il existe un ouvert V contenant a tel que :
 $f|_{A \cap V}$ admette un minimum (resp. maximum) en a

Exemple 22 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3 - x^2 y^5$.
 f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

VI.2 Extremum pour une fonction C^1 sur un ouvert

Définition 14 (Point critique) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
 a est un point critique de f si $\nabla f(a) = 0$.

Proposition 15 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction C^1 sur un ouvert. (dem)
 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.
 Si f admet un extremum local en un point a de U , alors $\nabla f(a) = 0$

Remarque 5 La réciproque est fausse.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 - y^2$$

Vérifier que $(0, 0)$ est un point critique de f , mais que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.

VI.3 Extrema d'une fonction de classe C^2 et Hessienne

Proposition 16 (Extremum et signe des valeurs propres de la hessienne. (dem)) Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que a est un point critique de f sur l'ouvert U .

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un minimum local strict.
- Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un maximum local strict.
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum en a .
- Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de maximum en a .

Attention, si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ et si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors on ne peut pas conclure.

Proposition 17 (Autre formulation) Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que a est un point critique de f sur l'ouvert U .

- Si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, alors f admet en a un minimum local strict.
- Si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, alors f admet en a un maximum local strict.
- Si $H_f(a)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum en a (point selle ou "col")

Dans les autres cas, on ne peut pas conclure.

Remarque 6 Cas particulier d'une fonction de deux variables : la matrice hessienne est symétrique de taille 2, son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2). \text{ On a donc : } \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) \text{ et } \lambda_1 \times \lambda_2 = \det(A).$$

Le signe du déterminant et de la trace sont à exploiter pour obtenir le signe des valeurs propres.

Exemple 23 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$

f admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

VI.4 Plan de recherche d'extrema d'une fonction f

Proposition 18 (Cas d'une fonction C^2 sur un ouvert)

- Recherche des points critiques de f .
- Etude de f autour de chaque point critique, à l'aide de la Hessienne.

Proposition 19 (Cas général : f est de classe C^1 sur une partie A quelconque de $\mathbb{R}^p$)

- Etude sur l'intérieur de A qui est ouvert, avec la méthode précédente.
- Etude sur $A \setminus \overset{\circ}{A}$ avec paramétrage éventuel.
- Conclusion

Proposition 20 (Rappel) Si f est une fonction continue sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, alors f admet un minimum et un maximum.

Exemple 24 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$

Exemple 25 $\forall (x, y) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

Exemple 26 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

Exercice 1 (Oral Ensam). Soit $a > 0$ et $b > 0$.

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, les points $A = (a, 0)$ et $B = (0, b)$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble constitué du triangle OAB et des points à l'intérieur de ce triangle. Pour $M = (x, y) \in \mathcal{D}$, on pose $f(M) = d(M, (Ox)) \times d(M, (Oy)) \times d(M, (AB))$.

Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$ et trouver ses extrema.

VII Exemples d'équations aux dérivées partielles

VII.1 Deux exemples fondamentaux

Exemple 27 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Exemple 28 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

VII.2 Utilisation de changement de variables

Exemple 29 Résolution de $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exemple 30 Résolution de l'équation d'onde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
Déterminer un changement de variables affine afin de simplifier l'équation, puis la résoudre.