

I : Révisions sur réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Les théorèmes doivent être connus. Tout exercice portant exclusivement sur ce chapitre peut être posé cette semaine.

II : Espaces vectoriels normés : voir le programme précédent.**III : Dérivabilité des fonctions vectorielles**

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle. (Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un.) Traduction par les coordonnées dans la base canonique.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et $f, g, f_1, \dots, f_p$ à valeurs vectorielles. La démonstration n'est pas exigible.

Application au produit scalaire et au déterminant.

Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.

IV : Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel**a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$**

Dérivée en un point selon un vecteur. Notation $D_v f(a)$. Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω .

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, admise). Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω . Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Différentielle de f en a : Définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$. **Notation** $df(a) \cdot h$.

b) Règle de la chaîne Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$. En pratique, on se limite à $n \leq 3$ et $p \leq 3$. **Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.**

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

c) Gradient

Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$. Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

IV : Questions de cours

- Définition de 2 normes équivalentes
- Propriétés sur les intersections / réunions d'ouverts, fermés (dem)
- Adhérence, Intérieur, partie dense (définitions)
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence (dem)
- Partie convexe définition
- Image réciproque d'un ouvert/fermé par une fonction continue (énonce)
- Equivalence des normes en dimension finie (énoncé)
- Extrema d'une fonction à valeurs réelles, continue sur un fermé borné (énoncé)
- Continuité des applications linéaires en dim finie (dem)
- Énoncés : Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire; application au produit scalaire et au déterminant.
- Dérivées partielles d'ordre 1, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (définitions)
- Théorème fondamental (existence du dl (ordre 1) pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. énoncé)
- Le caractère $\mathcal{C}^1$ entraîne la continuité (dem)
- Différentielle en un point : définition et propriétés (énoncé)
- Règle de la chaîne (énoncé)
- Calcul du gradient en coordonnées polaires (dém. au moins les premières étapes du calcul et les grandes lignes de la fin)
- Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe (dem)
- Gradient : définition et propriétés (énoncé)