

I : Révisions sur les fonctions définies par des intégrales

On pourra poser aux élèves des exercices sur des fonctions définies par des intégrales, lesdites fonctions pouvant être de deux types :

- la variable est dans les bornes : $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} g(t) dt$
- la variable est dans l'intégrande : $x \mapsto \int_I g(x, t) dt$.

Les théorèmes doivent être connus.

II : Dérivabilité des fonctions vectorielles : voir le programme précédent.**III : Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel**

a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: voir le programme précédent.

b) Règle de la chaîne : voir le programme précédent.

c) Gradient : voir le programme précédent.

d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Théorème de Schwarz (admis).

Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notation $H_f(a)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise) : si $h = (h_1, \dots, h_p)$ et $X = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$ alors

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} X^T H_f(a) X + o(\|h\|^2)$$

e) Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Point critique d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a , alors a est un point critique.

Attention : nous n'avons pas encore vu l'utilisation de la Hessienne pour déterminer la nature d'un point critique.

IV : Questions de cours

- Enoncés : Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire; application au produit scalaire et au déterminant.
- Dérivées partielles d'ordre 1, fonctions de classe C^1 (définitions)
- Théorème fondamental (existence du dl (ordre 1) pour une fonction de classe C^1 : énoncé.
- Le caractère C^1 entraîne la continuité (dém)
- Différentielle en un point : définition et propriétés (énoncé)
- Règle de la chaîne (énoncé)
- Calcul du gradient en coordonnées polaires (dém. au moins les premières étapes du calcul et les grandes lignes de la fin)
- Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe (dém)
- Théorème de Schwarz (énoncé)
- Formule de Taylor Young (ordre 2) : énoncé