# Table des matières



# I Modèles probabilistes - la théorie

## I.1 Introduction

**L'existant** Vous avez vu en premier année les concepts de base du calcul des probabilités, en tout cas ce qui concerne les calculs sur des modèles « finis ».
Rappel : dans le cas d'un **univers fini** : un espace probabilisé $(\Omega, P)$ est la donnée de $\Omega$, un ensemble fini, dont la famille des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelée la famille des événements et $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ est une application qui à chaque événement $A$ associe sa probabilité $P(A)$.
Rappeler la définition d'une probabilité vue en PTSI.

### Que peut-on traiter à l'aide d'un modèle fini ? Quelles en sont les limites ?

**Tirages avec remise** Le passionant phénomène en considération est le suivant : on dispose d'un sac contenant $N$ fruits (pommes et quetsches), indiscernables au toucher, dont une proportion $p$ de pommes et une proportion $q$ de quetsches. Alors $p+q=1$.
L'opération élémentaire effectuée est la suivante : on prend un fruit dans le sac, on note son type et on le remet dans le sac.

**Succession de $n$ tirages avec remise** L'opération complète est la suivante : on effectue $n$ opérations élémentaires successives. **On a un nombre d'opérations connues à l'avance, on peut travailler dans un univers fini**. La méthode combinatoire consiste à considérer les configurations possibles, à évaluer leurs probabilités d'apparition et à les dénombrer.
Une configuration pour cette expérience est une suite de $n$ lettres, $P$ ou $Q$, correspondant au codage d'un tirage. Par exemple $PPQQ...PQ$ code le fait que les deux premiers tirages ont été des pommes, les deux suivants des quetsches, l'avant dernier une pomme et le dernier une quetsche. (A l'avenir, je préfère la notation $P_1P_2Q_3Q_4....P_{n-1}Q_n$ pour décrire cet événement.)
Une configuration donnée a une probabilité $p^{\text{nbre de }P}.q^{\text{nbre de }Q}$ d'apparition. **Au fait Pourquoi ? ?** [1]
Notons $S$ le nombre de fois où j'ai tiré des pommes de mon sac.
Trouver la loi de $S$, qui prend clairement ses valeurs dans l'ensemble $s \in \{0,\dots,n\}$, consiste, pour chaque $s \in \{0,\dots,n\}$, à trouver et dénombrer les configurations comportant exactement $s$ fois la lettre $P$.
Il y a exactement $\binom{n}{s}$ telles configurations, toutes ayant même probabilité d'apparition $p^s q^{n-s}$ et donc

$$\forall s \in \{0,\dots,n\}\,,\ P(S=s) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s} \qquad \textbf{Au fait Pourquoi ? ?}$$

On dit que $S$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1. On considère l'univers $\Omega = \{P;Q\}^n$ et chaque élément $\omega$ est affecté du poids $p_\omega = p^{\text{nbre de }P}.q^{\text{nbre de }Q}$. Vous avez vu en PTSI que cela permet de définir une probabilté sur $\Omega$.

**Succession d'opérations élémentaires dont on ne connaît pas le nombre a priori :** Je tire des pommes et des quetsches de mon sac. Je m'arrête dès que j'ai tiré une pomme. Quelle est la probabilité que je m'arrête un jour ?
Quelle est la probabilité de tirer deux pommes de suite avant d'avoir tiré deux quetsches de suite ?

L'univers « naturel » est l'ensemble des suites infinies de $P$ et de $Q$ : $\Omega = \{P, Q\}^{\mathbb{N}}$.
Première difficulté : c'est un ensemble infini.
Encore pire : ce n'est pas un ensemble dénombrable (admis).

## I.2 Evénement, univers des possibles

**On appelle expérience $\mathcal{E}$ (ou épreuve) aléatoire toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé à priori.**

> **Exemple 1 Jeu de Pile ou face.** On lance une pièce. On note pour chaque lancer si la pièce tombe sur Pile (P) ou sur Face (F), et la lance jusqu'à obtenir le premier Pile.

**Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non. On les appelle *événements* (liés à l'expérience aléatoire). On peut dire, après avoir réalisé $\mathcal{E}$, si cet événement est réalisé ou non.**

**Effectuons l'expérience suivante : on lance un dé une fois et on note le numéro obtenu**. On obtient un nombre $\omega \in [\![ 1 ; 6 ]\!]$.
L'événement $A_1$="obtenir un numéro pair" est réalisé si et seulement si $\omega \in \{2; 4; 6\}$. On représentera donc $A_1$ par $\{2; 4; 6\}$ et on écrira $A_1 = \{2; 4; 6\}$
L'événement $A_2$="obtenir le nombre 4" est réalisé si et seulement si $\omega \in \{4\}$. On représentera donc $A_2$ par $\{4\}$ et on écrira $A_2 = \{4\}$
$A_3$="obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" est réalisé si et seulement si $\omega \in$
On représentera donc $A_3$ par :
Chaque événement de l'expérience peut être représenté par une partie de l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
**A chaque expérience aléatoire, on peut associer un ensemble $\Omega$ tel que chaque événement puisse être représenté par une partie de $\Omega$. L'ensemble $\Omega$ est appelé *univers*, ou *univers des possibles* ou *univers des résultats observables.***
**Un événement définissant entièrement le résultat de l'expérience aléatoire est appelé événement élémentaire. C'est un singleton $\{\omega\} \subset \Omega$.**
Par exemple, lorsque l'on tire un dé et que l'on note le numéro obtenu sur la face supérieure, l'événement "on obtient 5" est un événement élémentaire. En revanche, l'événement "on obtient un nombre pair" n'est pas un événement élémentaire.

**Effectuons l'expérience de l'exemple 1** (Jeu de Pile ou face). On note 0 si la pièce tombe sur Pile et 1 si elle tombe sur face.
On prend $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, qui a le mauvais goût d'être non dénombrable. On imagine qu'on tire indéfiniment.....
Un événement élémentaire est alors :
De ce fait l'événement : $F_1$=« J'ai obtenu Face au premier lancer »n'est pas un événement élémentaire.
$\omega \in F_1 \iff$
On note $P_2$=« on a eu Pile au 2e lancer ». Alors :
$\omega \in P_2 \iff$
**Un évènement qui n'est jamais réalisé s'appelle évènement impossible.**
**Un évènement qui se réalise toujours est un évènement certain.**
**$\Omega$ est certain, et $\varnothing$ est impossible**.

## I.3 Langage des événements

Dans tout ce paragraphe, les évènements qui vont intervenir correspondent à une même expérience aléatoire (et donc à un même univers $\Omega$). On note $\omega$ le résultat obtenu lorsque l'on effectue cette expérience.

1. Considérons deux événements $A$ et $B$. ($A$ et $B$ sont donc représentés par des parties de $\Omega$).
   (a) On peut définir l'**énémenent contraire de** $A$ : "non $A$" par : "non $A$" est réalisé si $A$ n'est pas réalisé.
   Donc : "non $A$" est réalisé $\iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$.
   Donc "non $A$" est représenté par $\overline{A}$.
   Exemple : le contraire d'un événement certain est
   (b) L'événement **"$A$ ou $B$"** est réalisé si l'un au moins des événements $A$ ou $B$ est réalisé au cours de la même expérience.
   Autrement dit : "$A$ ou $B$"est réalisé $\iff$ ($\omega \in A$ ou $\omega \in B$) $\iff \omega \in A \cup B$.
   Donc l'événement "$A$ ou $B$" est représenté par
   (c) L'événement **"$A$ et $B$"** est réalisé si les deux événements $A$ et $B$ sont réalisés simultanémént au cours de la même expérience.
   Donc : "$A$ et $B$" est réalisé $\iff$ ($\omega \in A$ et $\omega \in B$) $\iff \omega \in A \cap B$.
   Donc l'événement "$A$ et $B$" est représenté par
   (d) Les événements $A$ et $B$ sont dits **incompatibles** ou disjoints si $A$ et $B$ ne peuvent pas être réalisés au cours de la même expérience, c'est à dire si l'événement "$A$ et $B$" est impossible.
   Donc deux événements sont incompatibles si :
   Exemple : deux événements contraires sont incompatibles.
   (e) On définit l'événement **"$A-B$"** de la manière suivante : "$A-B$" est réalisé lorsque "$A$ est réalisé mais $B$ n'est pas réalisé".
   Donc : "$A-B$" est réalisé $\iff$ ($\omega \in A$ mais $\omega \notin B$) $\iff \omega \in A \backslash B = A - B = A \cap \overline{B}$
   (f) On dit que **"$A$ implique $B$"** si la réalisation de $A$ implique la réalisation de $B$.
   Donc : "$A$ implique $B$" signifie que : $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$
   Autrement dit "$A$ implique $B$" est vrai si
2. Par ailleurs, dans le cas où l'univers est infini, on souhaite pouvoir faire une union dénombrable d'événements. Par exemple, dans l'expérience 1, on veut pouvoir considérer l'événement $B$="il faut tirer au moins 3 fois pour obtenir Pile". Or , si l'on note $A_k$ l'événement $A_k$ ="on obtient le 1er Pile au $k$-ième lancer", alors $B = \bigcup\limits_{k\geq 3} A_k$.

   Expérience alternative : je joue au loto toutes les semaines et je m'arrête de jouer dès que j'ai gagné le gros lot..... et pour modéliser la situation, on imagine que l'on peut jouer indéfiniment, le nombre de semaines que j'ai à vivre étant très grand et inconnu etc.... C'est alors exactement la même chose que le jeu de Pile/Face ci-dessus.

**Remarque 1 Intersection et union infinies.** Soit $\Omega$ un ensemble. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensemble de $\Omega$.

$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff$$

$$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff$$

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \qquad\qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} =$$

## I.4 Tribu sur $\Omega$

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et $\Omega$ l'univers correspondant. On veut définir un cadre pour décrire les événements liés à $\mathcal{E}$, c'est à dire un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On souhaite évidemment que les opérations sur les événements précédemment décrites aient des événements comme résultat.

**Définition 1** Soit $\Omega$ un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathcal{T}$ est **une tribu sur** $\Omega$ si

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, c'est à dire : $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

Tout élément de la tribu $\mathcal{T}$ est appelé un **événement**.

**Exemple 2** $(a)$ Si $\Omega$ est un ensemble, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de $\Omega$. Dans la pratique, quand $\Omega$ sera fini, on prendra souvent $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.
$(b)$ Si $\Omega$ est un ensemble et $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, alors $\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ est une tribu de $\Omega$.

**Proposition 1** Soit $\Omega$ et $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$.

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par unions et intersections finies
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable c'est à dire :

$$\text{si } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } \mathcal{T}, \text{ alors } \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{T}.$$

**Exemple 3** Je tire indéfiniment des boules dans un sac contenant des boules blanches et des boules noire. Tirages avec remise.... Je note $B_n$ =« au $n$-ième tirage, je tire une boule blanche »
Et $N_n = \overline{B_n}$ = « au $n$-ième tirage, je tire une boule noire ».
**Je suppose qu'il existe un univers $\Omega$ et une tribu $\mathcal{T}$ sur $\Omega$ telle que $B_n$ et $N_n$ sont bien des événements (on ne le répétera pas tout le temps).** (Ici, on pourrait prendre $\{B, N\}^{\mathbb{N}^*}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$). Alors
$B_k = \{\omega \in \Omega$ tels que le $k$-ème terme de $\omega$ vaut $B)$.
« Je tire indéfiniment des boules blanches »=
« Je tire au moins une boule blanche »=
« Je ne tire aucune boule blanche »=

**Définition 2** Soit $\Omega$ un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$. On considère $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
**On dit que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet dénombrable d'événements** lorsque :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
- $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \Omega$

**Remarque 2** Considérons $(A_1, \cdots, A_n)$ système complet fini d'événements, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

En rajoutant $A_0 = \emptyset$ et $A_k = \emptyset$ pour $k > n$, on obtient un système complet dénombrable d'événements. (On peut donc aussi parler de système complet « au plus dénombrable »d'événements.)
**Ainsi la propriété précédente reste vraie si l'on prend $i \in I$ où $I$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.**

**Exemple 4** Si $A$ est un événement, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet (fini) d'événements.
Si $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $\{\{\omega_i\}, i = 1..n\}$ est un système complet d'événements.
Si $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ et $A_0 = FFFFF....$ et pour $k \geqslant 1$, $A_k = F_1...F_{k-1}P_k$ (défini plus haut) alors $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Pouvez-vous traduire en français les événements $A_i$ ?

## I.5 Probabilité

**Définition 3** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ une application $P$ de $\mathcal{T}$ dans $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) \quad (\sigma - \text{additivité}).$$

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est alors appelé **espace probabilisé**.
Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $P(A)$ est la **probabilité de l'événement** $A$.

**Remarque 3** Examinons plus précisément la $\sigma$ − additivité.

- Remarquons tout d'abord qu'on peut en déduire la probabilité d'une union finie : si on prend $A_0, \cdots, A_N$ éléments de $\mathcal{T}$, on peut poser $A_i = \emptyset$ pour tout $i > N$ et du coup

$$P(\bigcup_{i=0}^{N} A_i) = P(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) = \sum_{i=0}^{N} P(A_i).$$

  **La probabilité d'une union <u>finie</u> disjointe d'événements $A_i$ est bien égale à la somme des $P(A_i)$.**

- L'écriture $\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i)$ désigne a priori la somme d'une série, donc la limite quand $N \to +\infty$ de $\sum_{i=0}^{N} P(A_i)$. **Peut-on toujours dire qu'elle converge ?**

  Oui car $\sum_{i=0}^{N} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=0}^{N} (A_i)\right) \leq 1$. On a donc une série à termes positifs et les sommes partielles sont majorées donc la série $\sum P(A_i)$ est convergente et sa somme $\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$ existe.

  Par ailleurs, $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ est un événement, donc sa probabilité existe dès lors qu'on suppose que $P$ est une fonction définie sur $\mathcal{T}$.

- La série $\sum P(A_i)$ est <u>absolument</u> convergente, donc la valeur de $\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$ ne dépend pas de l'ordre de sommation. C'est heureux : imaginons que mon voisin n'a pas nommé les événements $A_i$ comme moi, mais a bien considéré les mêmes événements. Il va avoir une suite $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $B_i = A_{\sigma(i)}$ et il aura $\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ et donc $P(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i) = P(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i)$ soit $\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{\sigma(i)}) = \sum_{i=0}^{N} P(A_i)$. C'est bien toujours vrai.... OUf...

## Exemples FONDAMENTAUX

**Probabilité uniforme sur un univers fini** $\Omega$ de cardinal $n$. Une probabilité est dite uniforme si tous les évènements élémentaires (les singletons $\{\omega\}$) ont la même probabilité. Si $\Omega$ est muni d'une probabilité uniforme, alors, pour tout $k \in \{1, \cdots n\}$, $P(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n}$.
De plus $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

**Remarque 4** Si $P$ **est une probabilité sur un ensemble infini dénombrable** $\Omega = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$**, muni de la tribu** $\mathcal{P}(\Omega)$**, on ne peut plus avoir équiprobabilité des événements élémentaires** $\{x_n\}$.
Supposons en effet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(\{x_n\}) = p > 0$, alors la $\sigma$-additivité imposerait que

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p = +\infty.$$

C'est en contradiction avec $P(\Omega) = 1$.

**Modélisation de $N$ lancers d'un pièce** On lance pièce $N$ fois, avec pour chaque lancer une probabilité $p$ de tirer Pile et une probabilité $q = 1-p$ de tirer Face. On peut considérer que l'univers est $\Omega = \{P, F\}^N$, muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit une probabilité en posant $P(\{\omega\}) = p^k q^{N-k}$ où $k$ est le nombre de Pile obtenus. On peut montrer qu'un tel modèle convient bien.
Plus précisément, si on note $P_k$=« obtenir Pile au $k$-ème lancer », alors

- $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$
- $\forall k = 1..N,\ P(P_k) = p$
- les événements $(P_k)_{k=1..N}$ sont mutuellement indépendants.

**Jeu de Pile ou Face infini** Nous allons **admettre** qu'il existe un modèle $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ décrivant l'expérience suivante : on tire indéfiniment une pièce, avec, pour chaque lancer, une probabilité $p$ de tirer Pile et une probabilité $q = 1-p$ de tirer Face, les résultats des lancers successifs étant mutuellement indépendants. On peut prendre $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (au lieu de $\{P, F\}^{\mathbb{N}}$). En revanche, il n'est pas possible (nous l'admettons) de prendre comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ pour pouvoir définir une probabilité décrivant l'expérience correctement, à savoir de manière à ce que

- « tirer Pile au $n$-ème lancer »est un événement, souvent noté $P_n$ et dont la probabilité est $p$
- les tirages sont mutuellement indépendants c'est à dire :

**Question : Calculer** $P$(on obtient indéfiniment Pile).

**Remarque 5 ATTENTION** : Un événement possible (ou « non vide ») peut être de probabilité nulle...

**Définition 4** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{T}$.
Si $P(A) = 0$, on dit que $A$ est négligeable ou quasi-impossible.
Si $P(A) = 1$ on dit que $A$ est presque sûrement réalisé ou quasi-certain.

**Proposition 2** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soient $A, B$ deux évènements. Alors :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Si $A \subset B$ alors $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
4. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Alors pour tout événement $A$, on a :
   $P(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(A \cap B_i)$. En particulier $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i) = 1$

**Définition 5** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé.

- On dit que **la suite** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$.
  Cela signifie que : si $A_n$ est réalisé, alors $A_{n+1}$ est réalisé.
- On dit que **la suite** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$.

**Théorème 1** **de continuité croissante** : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ (la suite est croissante).

$$\text{Alors : } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

**Remarque 6** Pour $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$, on peut aussi utiliser la notation $P\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

**Preuve** : La suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow P(A_n) \leqslant P(A_{n+1})$). Elle est aussi majorée par 1 donc elle est convergente.
On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1} = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$.

*Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.*

Pour $n = 0$ : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{0} B_k = B_0 = A_0$.Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.

Alors $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n$ et $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k = B_{n+1} \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} B_k) = B_{n+1} \cup A_n = (A_{n+1} \backslash A_n) \cup A_n = A_{n+1}$.

*Montrons que les $B_k$ sont deux à deux incompatibles.*

Soit $i, j$ des entiers naturels tels que $i < j$. On a $B_j = A_j \backslash A_{j-1}$, comme $i \leq j-1$ on a $B_i \subset A_{j-1}$, donc $B_i \cap B_j = \emptyset$.

*Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.* Pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$, donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Réciproquement : $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ donc $A_n \subset \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. et donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. La double inclusion donne l'égalité.
Puis, en utilisant les résultats précédents et la $\sigma$-additivité de $P$ :

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(B_n) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} B_n) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N).$$

**Théorème 2 de continuité décroissante** : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ (la suite est décroissante).
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n)$.

**Proposition 3** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.

- $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$.
- $P(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$

**Exemple 5** On lance un dé parfait et on recommence tant qu'on n'a pas obtenu le nombre 6.
Soit $A$="on effectue un nombre fini de lancers". Calculer $P(A)$

**Exemple 6** On considère une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est $p \in ]0,1[$.
Deux joueurs $A$ et $B$ lancent alternativement la pièce. Le joueur $A$ commence. Le premier qui obtient Face a gagné la partie.
Quelle est la probabilité que $A$ gagne le jeu ?
Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

**Théorème 3 de sous-additivité.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$. Alors :

$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

# II Conditionnement et indépendance

## II.1 Introduction

**Proposition 4** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{T}$ un événement de probabilité non nulle : $P(B) \neq 0$. On considère l'application $P_B$ définie sur $\mathcal{T}$ par

$$\forall A \in \mathcal{T},\ P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Cette application est une probabilité définie sur $\mathcal{T}$.

**Définition 6** Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$ un événement de probabilité non nulle, alors l'application $P_B$ définie ci-dessus est appelée **probabilité conditionnelle relative à $B$** ou **probabilité sachant $B$.**

Si $A \in \mathcal{T}$, on appelle **probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$** le réel $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
On note aussi $P_B(A) = P(A|B)$

**Dans tout ce qui suit, on suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.**

**Proposition 5** Si $B$ est un événement tel que $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

**Proposition 6** **Formule des probabilités composées**. Soit $n > 1$. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots\cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

## II.2 Formule des probabilités totales.

Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. On a déjà vu que :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \text{ la série } \sum P(A \cap B_i) \text{ converge et } P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} (A \cap B_i) \qquad (\star)$$

**Remarque 7** Lorsque l'on considère un système *fini* d'événements $(B_0, ...., B_n)$, on peut poser $B_k = \emptyset$ pour $k \geqslant n+1$ et l'on obtient alors : $\forall A \in \mathcal{T},\ P(A) = \sum_{i=0}^{n} (A \cap B_i)$.

Considérons donc un système complet d'événements $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
En utilisant les probabilités conditionnelles, si on suppose que les $P(B_i)$ sont toutes non nulles, on déduit de ce qui précède que :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{T}, \text{ la série } \sum P(B_i) \times P_{B_i}(A) \text{ converge et : } P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i) \times P_{B_i}(A)$$

**Que se passe-t-il lorsqu'un des $B_i$ est de probabilité nulle ?**
Dans ce cas : $A \cap B_i \subset B_i \Rightarrow 0 \leq P(A \cap B_i) \leqslant P(B_i) = 0 \Rightarrow P(A \cap B_i) = 0$.
Dans le cadre de l'application de la formule des probabilités totales, on adopte la convention suivante : si $P(B_i) = 0$, on pose $P(A|B_i)P(B_i) = 0$. En partant de l'égalité $(\star)$, on peut alors écrire : $P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i)P(A \mid B_i)$.

**Que se passe-t-il lorsque $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i) = 1$ ?** On ne suppose pas ici que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i = \Omega$.

On pose $C_0 = \overline{\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i}$ et $C_i = B_{i-1}$ pour $i \geqslant 1$.

Alors $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. De plus : $P(C_0) = 1 - P(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i) = 0$.

On peut donc appliquer ce qui précède : $P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A \cap C_i)$ car $P(A \cap C_0) = 0$. Et donc

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A \cap B_{i-1}) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A \cap B_i).$$

**Définition 7** **Système quasi-complet d'événements** : Soit $\Omega$ un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$. On considère $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. **On dit que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet dénombrable d'événements** lorsque :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
- $P(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) = 1$

**Théorème 4 Formule des probabilités totales.**
Soit $A \in \mathcal{T}$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.
**On adopte la convention** $P(A \mid B_n)P(B_n) = 0$ **lorsque** $P(B_n) = 0$.
Alors la série $\sum P(B_n \cap A)$ converge et $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A \mid B_n)\, P(B_n)$
La formule reste valable dans le cas d'un système fini d'événements.

**Remarque 8** En pratique : si il est facile de vérifier que chaque $B_i$ est de probabilité non nulle, alors on le fait et on applique alors la formule sans commentaire.
Si ce n'est pas immédiat, alors on applique la formule en mentionnant :

« on applique la convention $P(A \mid B_n)P(B_n) = 0$ lorsque $P(B_n) = 0$ ».

## II.3 Retournement de conditionnement et formule de Bayes

**Proposition 7 Retournement de conditionnement ou (première) formule de Bayes.**
Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilités non nulles.
Alors : $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}$.

**Proposition 8 Formule de Bayes.**
Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements et soit $i_0 \in I$ tel que $P(B_{i_0}) \neq 0$.
Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $P(A) \neq 0$. On adopte la convention : $P(A \mid B_n)P(B_n) = 0$ lorsque $P(B_n) = 0$.
Alors :

$$P_A(B_{i_0}) = \frac{P(B_{i_0}) \times P_{Bi_0}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_{i_0}) \times P_{Bi_0}(A)}{\sum_{i\in I} P(A \cap B_i)}$$

**Exemple 7** On a un lot de 100 dés, parmi lesquels 25 dés sont pipés : pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est de $1/2$. (Pour un dé non pipé, la probabilité d'obtenir 6 est : ). On prend un dé au hasard dans ce lot. On lance le dé choisi et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

**Exemple 8** On a $n$ urnes $U_1, \cdots, U_n$. L'urne $U_i$ contient $a_i$ boules blanches et $b_i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une ou plusieurs boules de cette urne, avec remise.
Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche ?
Quelle est la probabilité que les 10 premières boules tirées soient blanches ?
On suppose que la première boule tirée est blanche. Quelle est alors la probabilité de l'avoir tirée dans la première urne ?

Quelle est la différence très importante entre cette expérience de tirages avec remise et l'expérience qui consiste à faire des tirages avec remise dans une urne choisie, constante ?

**Remarque 9** La formule de Bayes sert à "remonter le temps" c'est à dire à calculer une probabilité conditionnelles $P(A \text{ sachant} B)$ où $A$ précède $B$ au lieu de le suivre. Autrement dit : on cherche la probabilité d'une cause possible connaissant le résultat de l'épreuve.

## II.4 Evénements (mutuellement) indépendants

**Définition 8** On dit que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants lorsque

**Remarque 10** Si $P(B) \neq 0$, ($A$ et $B$ sont indépendants) $\iff$

**Définition 9 Indépendance d'une famille finie d'événements.**
Soient $A_1, \cdots A_n$ $n$ événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. On dit que $A_1, \cdots A_n$ sont deux à deux indépendants si : $\forall i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$
2. On dit que $A_1, \cdots A_n$ sont indépendants si :

$$\forall J \subset [\![ 1\,;\, n ]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

**Attention** : $(A_1, \cdots A_n$ indépendants$) \Rightarrow (A_1, \cdots A_n$ deux à deux indépendants$)$.
En revanche **la réciproque est fausse.**

**Exemple 9** : on lance deux dés non pipés discernables. Soit $A_1$="le premier dé amène un nombre pair". Soit $A_2$="le 2e dé amène un nombre pair". Et soit $A_3$ ="La somme des deux nombres obtenus est paire". Ici, on a $A_1, A_2, A_3$ deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

**Exemple 10**
- $N$ lancers successifs d'une pièce (ou d'un dé). Vu en 1ère année.
- $N$ tirages successifs avec remise dans une urne donnée. Vu en 1ère année.
- Il existe un modèle permettant de décrire l'expérience consistant à lancer indéfiniment une pièce (ou un dé), avec :
  — $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(P_k) = p$,
  — les événements $P_1, ...., P_N$ sont indépendants pour tout $N$.

**Remarque 11** L'indépendance (mutuelle) de plusieurs événements est souvent suggérée par l'énoncé ou justifiée par les conditions de l'expérience.

**Remarque 12** L'indépendance de $A$ et $B$ implique celle de $A$ et $\bar{B}$, celle de $\bar{A}$ et $B$, et celle de $\bar{A}$ et $\bar{B}$. De la même manière, nous admettrons que l'indépendance de $A_1, \cdots, A_n$ implique celle de $\tilde{A}_1, \cdots \tilde{A}_n$ où $\tilde{A}_i$ désigne soit $A_i$ soit $\bar{A}_i$.

# III Variables aléatoires discrètes

## III.1 Généralités

**Définition 10** On se donne $(\Omega, \mathcal{T})$.
Une application $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est u**ne variable aléatoire discrète** si

- $X$ est définie sur $\Omega$.
- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{T}$ c'est à dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x\} \in \mathcal{T}$$

Si $X(\Omega)$ est fini, on a une variable aléatoire (discrète) finie et si $X(\Omega)$ est dénombrable, on a une variable aléatoire discrète infinie.
$X(\Omega)$ est parfois appelé le *support* de $X$.
Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on dit que $X$ est une variable aléatoire **réelle** discrète.

**Remarque 13** Si $\Omega$ est fini et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application définie sur $\Omega$ est une variable aléatoire finie.

**Exemple 11** On considère une succession infinie de lancers d'une pièce, avec $P(Pile) = p$.
On pose $X$ = nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile
et on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais Pile.

On a admis qu'il existe un modèle décrivant cette expérience, de telle sorte que $P_n =$« on obtient Pile au $n$-ème lancer » est un événement.
Montrons que $X$ est alors une variable aléatoire réelle.
$X$ est bien une fonction définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega) =$
Soit $k \in X(\Omega)$ Montrons que $X^{-1}(\{k\})$ est un événement.

Donc $X$ est bien une variable aléatoire.
Par ailleurs, ici $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $X$ est une VAR discrète infinie.

**Remarque 14** On note $(X = x)$ ou bien $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.
Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x])$ est un événement, noté $(X \leqslant x)$.

De même on note $(X < x)$ l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x[)$ qui est aussi un événement. On note $(X \geqslant x)$ l'événement : Etc....

**NB** : Dans la pratique, on ne précise pas toujours $\Omega$ (le modèle), mais on précise **toujours** $X(\Omega)$.
On a les mêmes notations usuelles que pour les variable aléatoire finies : $P(X = k)$, etc...

**Exemple 12** Si on reprend la variable aléatoire de l'exemple précédent : $X = k$ si on obtient le premier Pile au $k$-ème lancer et $X = 0$ si on n'obtient jamais Pile.
Alors $\big((X = k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire $X$..

### III.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Remarquons que si $X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ l'ensemble $(X = x)$ est une événement (donc un élément de la tribu $\mathcal{T}$) et donc la probabilité $P(X = x)$ est bien définie !

**Définition 11** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
On appelle **loi de** $X$ la donnée de :

- $X(\Omega)$, l'image de $\Omega$ par $X$
- la distribution de probabilité de $X$, c'est à dire les valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$

**Remarque 15** La loi de probabilités de la variable aléatoire discrète est déterminée par la connaissance de l'application, notée $P_X$, définie par :

$$P_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}$$

**Remarque 16** On note $X \sim Y$ lorsque les variables $X$ et $Y$ suivent la même loi, c'est à dire lorsque :

**Proposition 9** Si $X$ est une variable aléatoire discrète et $f$ une fonction définie sur $X(\Omega)$, alors $f \circ X$ est aussi une variable aléatoire discrète.
On la note usuellement $f()X)$.

**Proposition 10** Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

**Exemple 13** On reprend la variable aléatoire réelle $X$ étudiée précédemment, donnant le rang d'apparition du premier Pile, et telle que $X = 0$ si Pile n'apparait jamais. Donner la loi de $X$. Que remarque-t-on ?

**Remarque 17** Rappelons que deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans pour autant être égales !

### III.3 Espérance d'une variable aléatoire discrète

**Définition 12** Soit $X$ une variable aléatoire discrète (finie ou infinie) sur $(\Omega, \mathcal{T}), P)$, avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I$ est un ensemble au plus dénombrable. Si

$$\sum_{i\in I} x_i P(X = x_i) \text{ converge } \boxed{\textbf{absolument}},$$

on dit alors que $X$ est une variable aléatoire **d'espérance finie.** Si tel est le cas, on appelle espérance de $X$ et on note $E(X)$ le réel $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$

**Remarque 18**

1. Si $X$ est une variable aléatoire finie, elle est toujours d'espérance finie, et il y a cohérence entre cette définition et celle vue en première d'année.
2. La convergence **absolue** est indispensable, pour que l'ordre des termes n'importe pas.
3. Si on a une VAR $X$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{Z}$, alors $X$ a est d'espérance finie si et seulement si les séries $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i P(X = x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z},\, i<0} x_i P(X = x_i)$ convergent absolument.
   De plus on a alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in N} x_i P(X = x_i) + \sum_{i\in\mathbb{Z},\, i<0} x_i P(X = x_i)$ ce que l'on note (un peu abusivement) : $E(x) = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$.

**Exemple 14** Question préliminaire : montrer que, pour $|x| < 1$, la série de terme général $nx^{n-1}$ converge. On lance indéfiniment un dé parfait. On note $X$ le rang d'apparition du premier 6. La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, calculer $E(X)$.

**Théorème 5** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors les séries $\sum kP(X = k)$ et $\sum P(X \geqslant k)$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence on a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$

**Preuve** Sans perte de généralité, on peut supposer que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, quitte à poser $P(X = k) = 0$ pour $k \notin X(\Omega)$.
**Calcul préliminaire.** Etude de la somme partielle de la série $\sum kP(X = k)$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,(\,P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)) = \left(\sum_{k=1}^{n} kP(X \geqslant k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} kP(X \geqslant k+1)\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} kP(X \geqslant k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (k+1-1)P(X \geqslant k+1)\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} kP(X \geqslant k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X \geqslant k+1)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k+1)\right)
\end{aligned}$$

Par téléscopage : $S_n = P(X \geqslant 1) - (n+1)P(X \geqslant n+1) + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k+1)\right) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(X \geqslant k)\right) - (n+1)P(X \geqslant n+1)$

- Supposons que $E(X)$ existe, c'est à dire que la suite $(S_n)$ a une limite finie. (On n'a pas besoin de préciser que la série converge absolument vu que toutes les valeurs prises par $X$ sont positives.)

  Soit $S'_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} P(X \geqslant k)\right)$ somme partielle de rang $n+1$ de la série $\sum P(X \geqslant k)$.

$$S'_{n+1} = S_n + (n+1)P(X \geqslant n+1) \quad (\star)$$

$$\begin{aligned}(n+1)P(X \geqslant n+1) &= (n+1) \times P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)\right) \\ &= (n+1) \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\end{aligned}$$

  Puis pour $k \geqslant (n+1)$, $0 \leqslant \alpha_k = (n+1)P(X = k) \leqslant kP(X = k)$ et ceci est le terme général d'une série convergente, et donc

$$0 \leqslant (n+1)P(X \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \quad (\star\star)$$

  Et on remarque que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = R_n$ reste partiel d'ordre $n$ de la série définissant l'espérance de $X$, laquelle série est convergente, donc $\boxed{R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$

  Donc par encadrement $(\star\star)$ permet d'affirmer que $(n+1)P(X \geqslant n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Donc d'après $(\star)$, la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et $E(X) = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

  **Conclusion** : si $E(X)$ existe, alors $\sum P(X \geqslant k)$ converge et de plus $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

- Réciproquement, supposons que la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge. Montrons que $E(X)$ existe, c'est à dire que $\sum kP(X = k)$ converge (absolument car série à termes positifs). En reprenant les notations précédentes, on a

$$S_{n+1} = S'_n - (n+1)P(X \geqslant n+1) \quad (\alpha)$$

  Or $(n+1)P(X \geqslant n+1) \geqslant 0$ donc $S_n \leqslant S'_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$ car $\sum P(X \geqslant k)$ est une série à termes positifs.

  La série $\sum kP(X = k)$ est une série à termes positifs et la suite des sommes partielles est majorée, donc elle converge. On peut alors utiliser le résultat de la première partie de la démonstration et l'on conclut que $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

**Exemple 15** On dispose d'un sac contenant des boules numérotées de 1 à $N$, indiscernables au toucher. On effectue $n$ tirages avec remise dans le sac. Soit $X$ le plus grand numéro tiré au cours des $n$ tirages.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(X \leq n)$ et $P(X \geq n)$.
2. Donner la loi de $X$.
3. Quelle est l'espérance de $X$ ? Donner un équivalent de $E(X)$ lorsque $N \to +\infty$.

**Exemple 16** 3 joueurs lancent simultanément une pièce. Pour chacun des joueurs, la probabilité d'obtenir Pile vaut $p \in ]0,1[$. On note $M$ le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour que chaque joueur ait obtenu Pile (au moins une fois). Calculer l'espérance de $M$.