Programme de colle. Semaine n°4 : du 09/10 au 13/10/2023.

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement.....

Il y a quelques éléments nouveaux par rapport à la semaine dernière : ils sont en *italique.*

Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessus) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : exercices 60 et 71 d'algèbre.

I : Espaces vectoriels, applications linéaires matrices

Tout le programme de PCSI est à réviser...

II : Compléments d'algèbre linéaire

1) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.

2) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité SSI la somme est directe.

3) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit).
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.

4) Trace

Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée.
Relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude (c'est à dire : deux matrices semblables ont même trace). Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

5) *Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées*

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Dimension d'un produit cartésien de 2 espaces vectoriels de dimension finie.
- Somme directe de n sous-espaces vectoriels : caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.
- Dimension d'une somme de 2 sous-espaces vectoriels.
- Base adaptée à la décomposition d'un espace E en somme directe de sous-espaces vectoriels.
- Polynomes de Lagrange : Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.
- Sous espaces stables et matrices diagonales par blocs (démonstration dans le cas de deux sous-espaces vectoriels)
- Trace : $\mathrm{Tr}(AB)$=$\mathrm{Tr}(BA)$.