

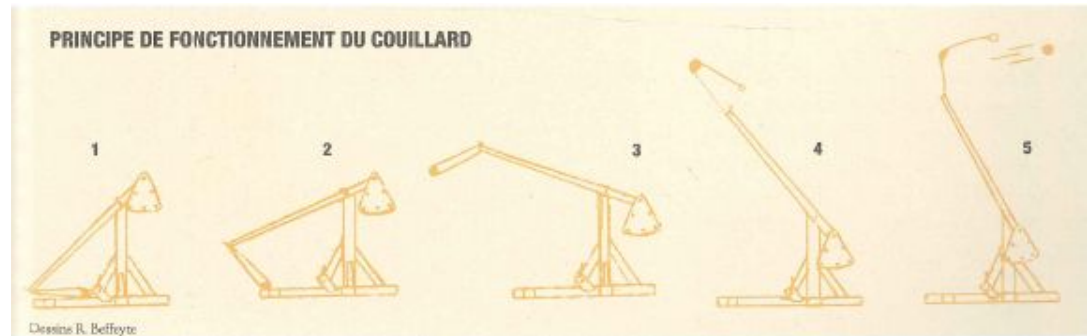
A large wooden trebuchet is shown in a field under a blue sky with scattered clouds. The trebuchet is made of dark wood and has a long arm extending upwards and outwards. It is positioned on a sandy area with green grass and a stone wall in the background.

Trébuchet: la physique derrière la machine de guerre

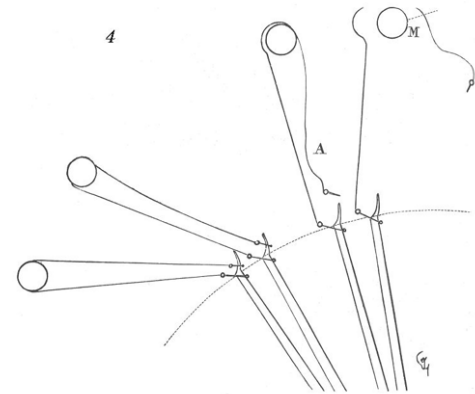
Vinceleux Mathéo
candidat 45857



Comment fonctionne le trébuchet ?



<https://viamoderna.hypotheses.org/835>



<https://viamoderna.hypotheses.org/835>



Pourquoi utiliser le trébuchet plutôt que la catapulte sa concurrente ?

	Trébuchet	Catapulte
distance	200~300m	100~200m
poids du projectile	jusqu'à 200 kg	jusqu'à 30kg
précision	très bonne surtout de loin	moyenne voir mauvaise de loin
facilité d'usage	assez compliqué (XIIème)	très simple (~400 av.J-C)



Lien avec le thème ?

Énergie
potentielle

conversion

Énergie
cinétique

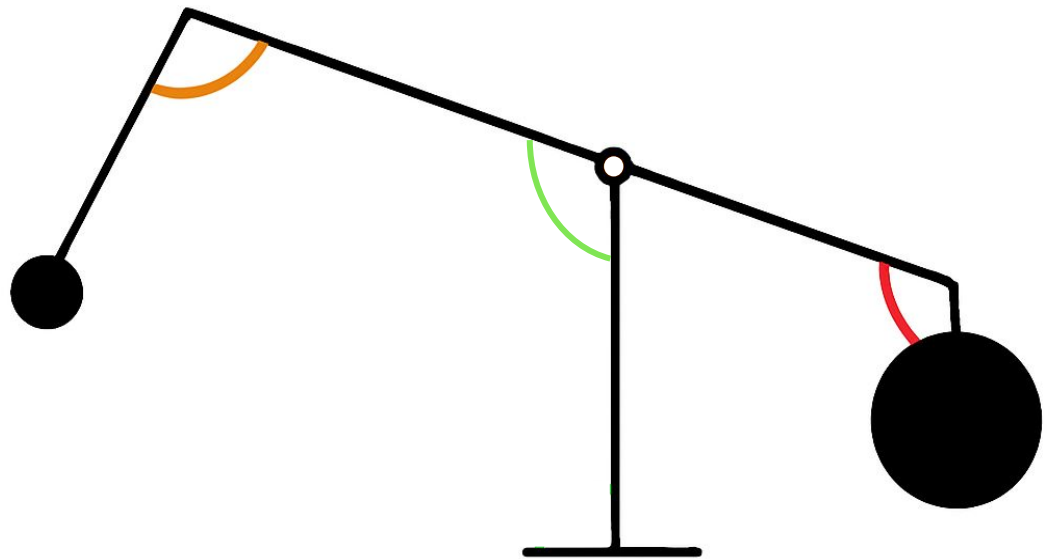


Schéma d'un trébuchet



<https://momes.parents.fr/apprendre/matieres-scolaires/histoire-geographie-emc/histoire/le-chateau-fort-847876>

Problématique

Comment la modélisation physique et numérique
permet-elle de comprendre
et de prédire le comportement d'un
trébuchet ?

P
L
A
N

I - Conception et fabrication
du trébuchet

II - Modélisation physique du
trébuchet

III - Exploitation informatique
des résultats expérimentaux

IV - Comparaison et synthèse des
deux approches

V - Conclusion

I - Tentatives et dimensions importantes

Quelques ratios importants (empirique)

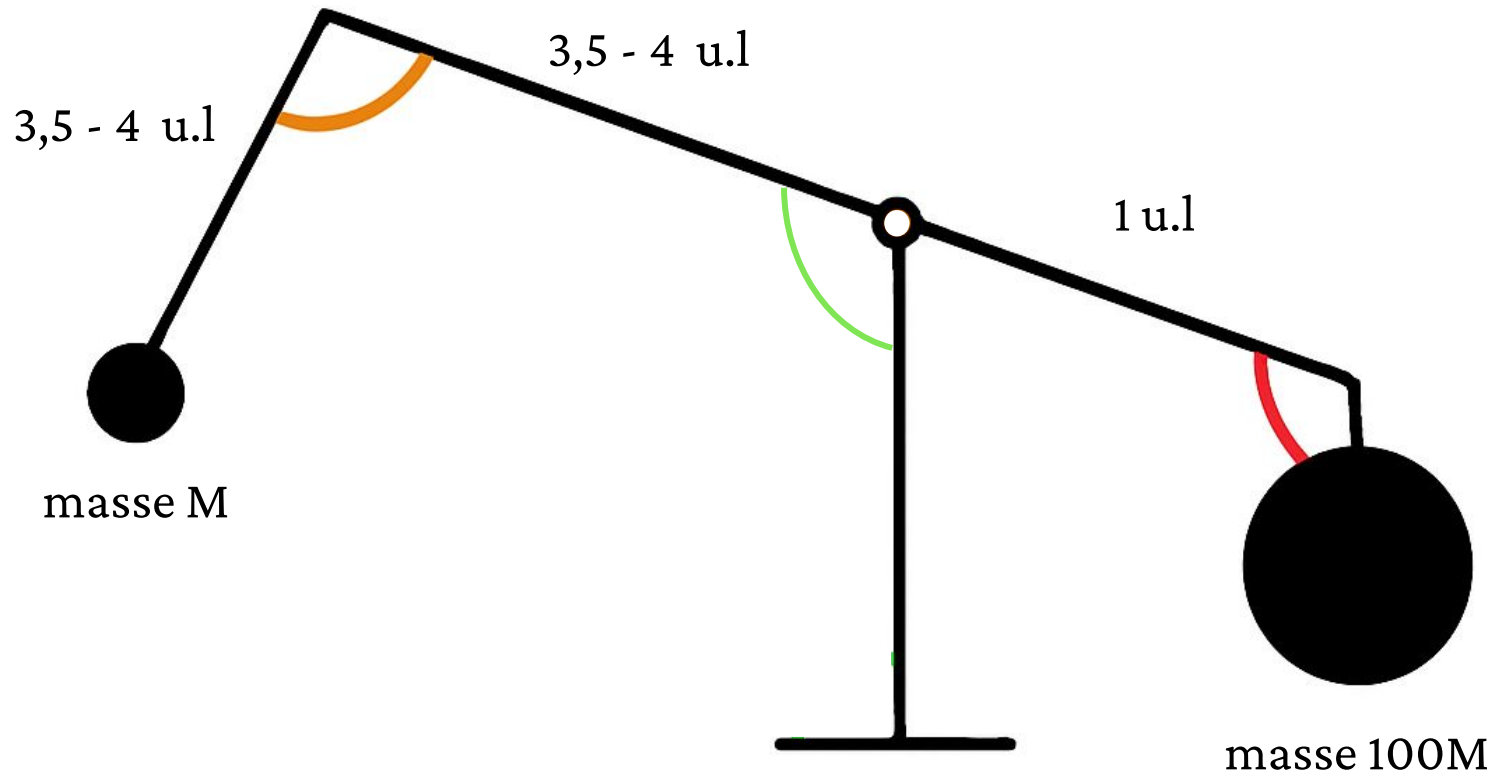
-rapport bras long / bras court = entre 3,5 et 4

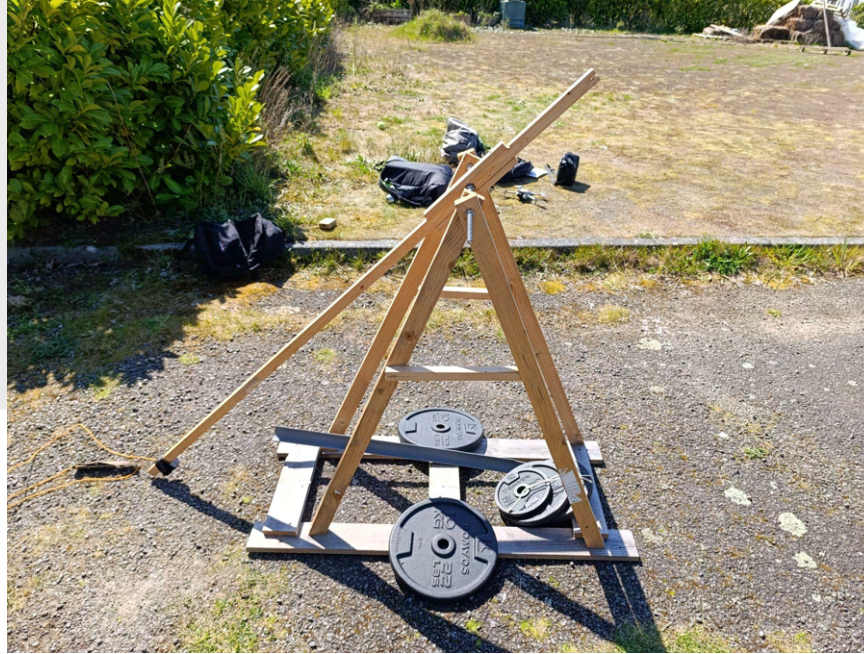
-rapport poids contrepoids / poids projectile = 100



premier trebuchet fonctionnel fabriqué

Représentation de ces rapports





Construction du trébuchet

Matériaux utilisés

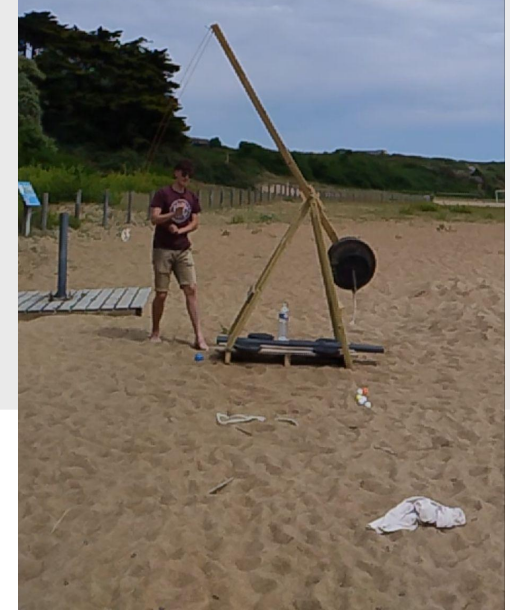
Bois de structure, tige
filetée et boulons pour le
pivot, corde et pochette en
tissu, gouttière en PVC

Dimensions principales

- Longueur du bras : 1.60m
- Hauteur du pivot : 1m
- Masse du contreponds : 10kg

Distances atteintes

bonne précision avec
des tirs allant à 25m
+/-3m



Deuxième trébuchet

Matériaux utilisés

Bois d'exterieur (sapin) ,
tige filetée et boulons pour
le pivot, corde et pochette
en tissu, gouttière en PVC

Dimensions principales

- Longueur du bras : 2.40 m
- Hauteur du pivot : 1.40m
- Masse du contrepoids :
70kg

Distances atteintes

61 m +/-10 m
précision beaucoup
moins bonne

Deux problèmes majeurs

- la surcharge



tige du deuxième
trébuchet pliée par
le contrepoids



rupture du point
d'attache du
contrepoids sur le
premier trébuchet

- Le manque de
précision quand on
augmente d'échelle

montée en échelle



imprécisions

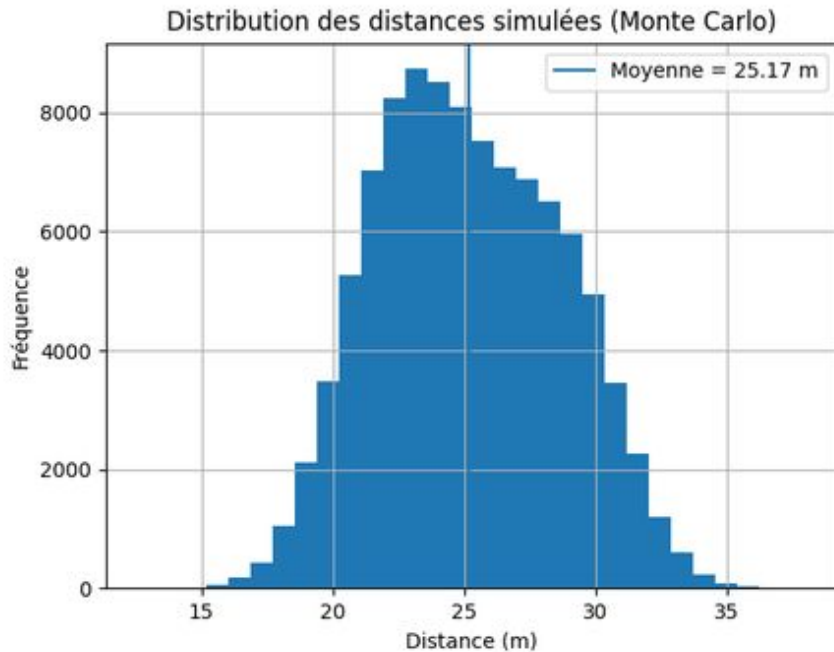
```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # 1. rentrer les distances mesurées
5 distances_mesurees = []
6
7 # 2. Paramètres de la simulation
8 nb_tirs_simules = 5000          # Nombre de tirs que l'on veut simuler
9 incertitude_typique = 2        # Incertitude
10
11 # 3. Génération des données simulées
12 distances_simulees = []
13 for d in distances_mesurees:
14     tirs = np.random.normal(loc=d, scale=incertitude_typique, size=nb_tirs_simules // len(distances_mesurees))
15     distances_simulees.extend(tirs)
16
17 # 4. grandeurs importantes
18 moyenne = np.mean(distances_simulees)
19 ecart_type = np.std(distances_simulees)
20
21 # 5. Affichage des résultats
22 print(f"Distance moyenne simulée : {moyenne:.2f} m")
23 print(f"Écart-type simulé : {ecart_type:.2f} m")
24
25 # 6. Graphique
26 plt.hist(distances_simulees, bins=30, color='skyblue', edgecolor='black')
27 plt.title("Distribution des distances simulées")
28 plt.xlabel("Distance (m)")
29 plt.ylabel("Fréquence")
30 plt.axvline(moyenne, color='red', linestyle='dashed', linewidth=1.5, label=f'Moyenne = {moyenne:.2f} m')
31 plt.legend()
32 plt.grid()
33 plt.show()
```

Programme python:
Monte-Carlo

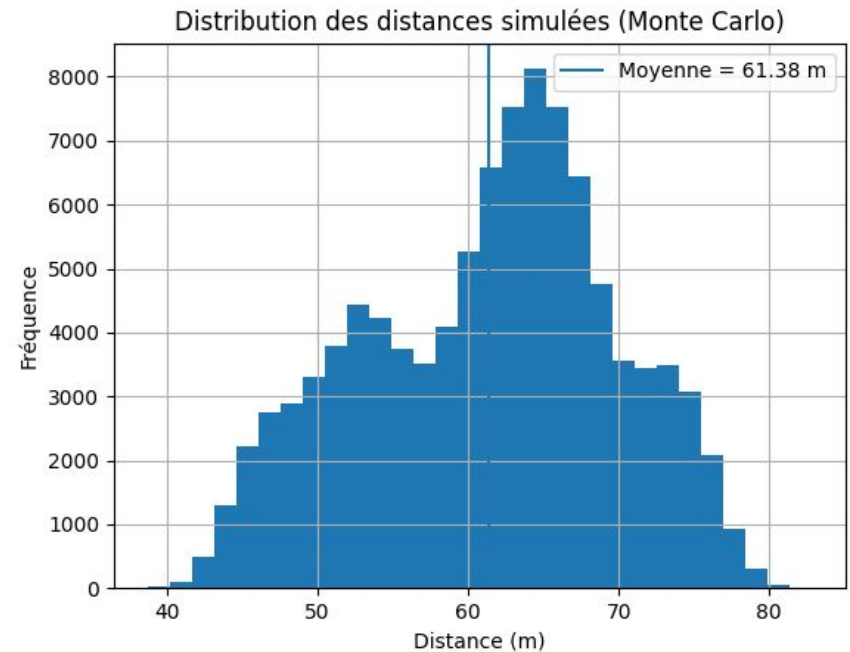
on obtient :

- la distance moyenne pour un lancer
- l'incertitude liée au lancer
- une répartition simulée des distances atteignables

Quelles valeurs utiliser?



pour le premier trébuchet
écart type (2,53m)



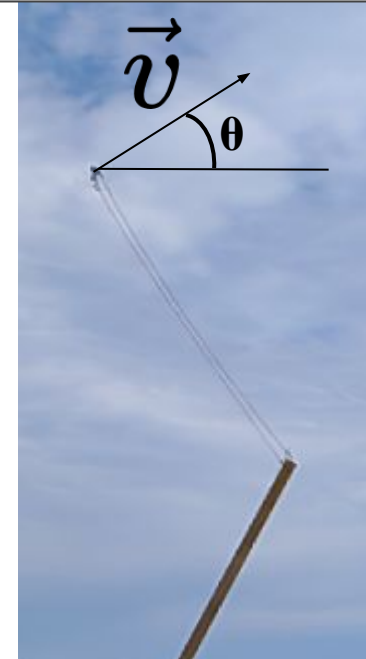
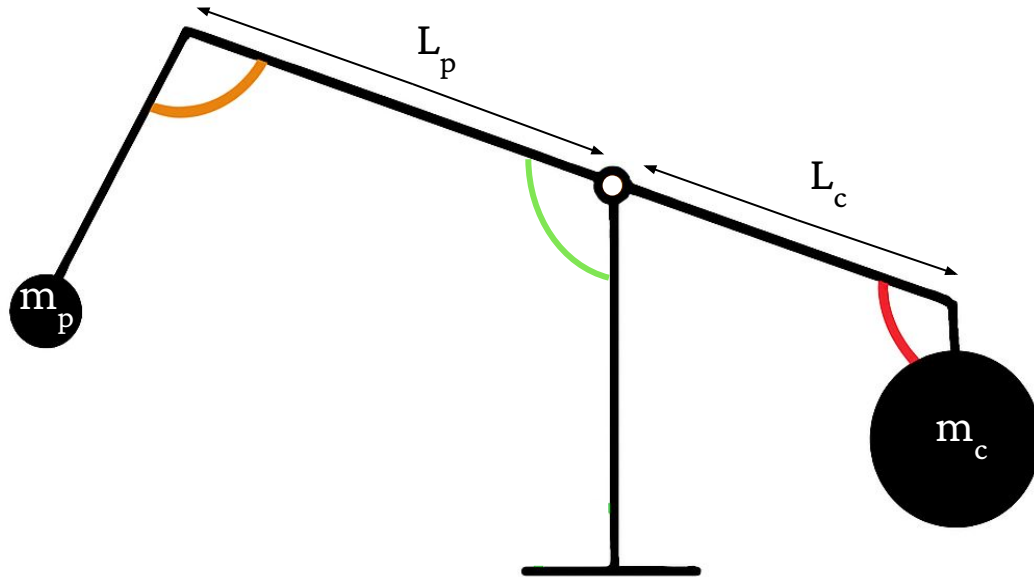
pour le deuxième trébuchet
écart type (8,47m)

Bilan de cette première approche expérimentale

- Une bonne compréhension de la physique derrière le système et de son maniement
- Des valeurs à utiliser pour les calculs à venir
- Des expériences menant à plusieurs pistes de recherche

II - Hypothèses pour une première modélisation

- Le trébuchet est un bras rigide de longueur totale $L = L_c + L_p$, articulé autour d'un axe fixe.
- La masse du bras est négligée devant celle du contrepoids.
- À l'extrémité courte (L_c) est fixé un contrepoids de masse m_c .
- À l'extrémité longue (L_p) est fixé un projectile de masse m_p .
- Le projectile quitte le bras au point où sa vitesse est maximale, avec un angle θ .
- **L'énergie mécanique est conservée.**



$$Em_{\text{début}} = Em_{\text{fin}}$$

$$Ep_{\text{début}} + Ec_{\text{début}} = Ep_{\text{fin}} + Ec_{\text{fin}}$$

or la vitesse initiale est nulle et
on choisit $Ep_{\text{fin}} = 0$ donc :

$$m_c gh = \frac{1}{2} m_p v^2$$

avec h la hauteur de chute du
contrepoids et v la vitesse du
projectile

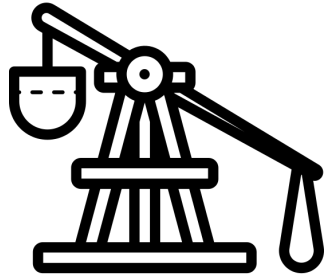
$$v = \sqrt{\frac{2m_c gh}{m_p}}$$

On obtient une vitesse de 4500 km/h

On veut maintenant calculer la portée. Comme on néglige les frottements la deuxième loi de Newton nous donne:

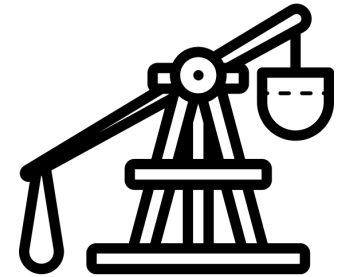

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\theta_0) \\ \ddot{y} = -gt + v_0 \sin(\theta_0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos(\theta_0)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)t + h \\ t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} + \tan(\theta_0)x + h \end{aligned}$$

on veut un distance max donc on prend $\theta_0 = 45^\circ$
à l'impact $y = 0$ et $h = 5,20\text{m}$



$$0 = -\frac{g}{v_0^2}x^2 + x + h$$

$$d = 159 \text{ km}$$



Problème!

Au moins une des hypothèses est irrecevable.

L'énergie n'est pas entièrement transmise au projectile.

Besoin d'une
nouvelle
approche
prenant en
compte
l'énergie qui
reste dans le
trébuchet

- Mêmes hypothèses
- Calcul de l'énergie cinétique avec le moment d'inertie I

On repart de $E_{p_{\text{début}}} = E_{c_{\text{fin}}}$

$$m_c gh = \frac{1}{2} I \omega^2$$

On obtient donc: $\omega = \sqrt{\frac{2m_c gh}{I}}$

Il s'agit maintenant d'estimer I

on néglige le poids de la fronde et du projectile
devant la verge et le contrepoids donc:

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{verge}} + I_{\text{contrepoids}}$$

Pour la verge

On utilise le théorème de Huygens
(translation d'axe) :

$$I_{\text{verge}} = \frac{1}{12} m_{\text{verge}} L_{\text{verge}}^2 + m_{\text{verge}} d_{\text{axe}/G}^2$$

Pour le contrepoids

Modèle : masse ponctuelle à
distance r du pivot

$$I_{\text{contrepoids}} = M_{\text{contrepoids}} r^2$$

Au final on a :

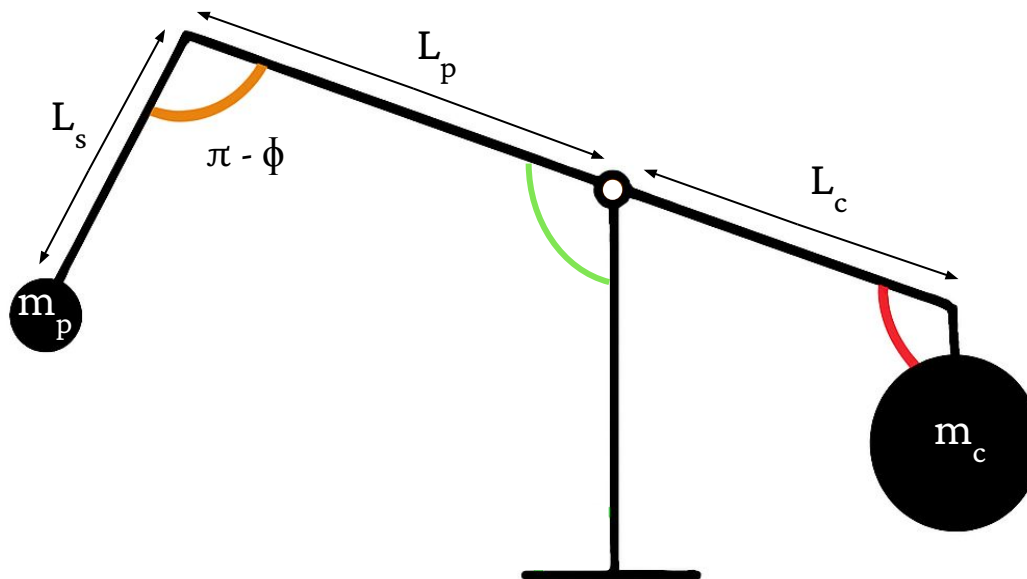
- $\omega = 6,65 \text{ rad/s}$
- $v = 25,3 \text{ m/s}$
- $d = 66.2 \text{ m}$

On sous-estime
donc la portée
réelle, encore une
hypothèse trop
importante.

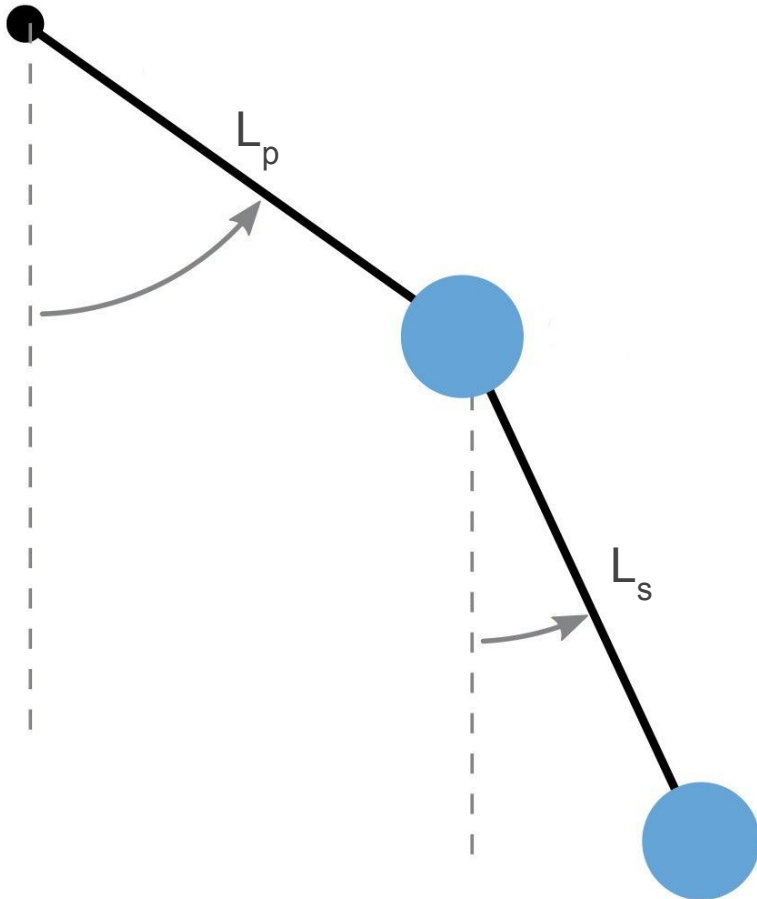
La fronde!

Hypothèses pour la deuxième modélisation

- Bras rigide de longueur totale $L = L_c + L_p$ et de masse nulle, pivotant autour d'un axe fixe.
- Contrepoids de masse m_c fixé à l'extrémité courte (L_c).
- Fronde (corde) de longueur L_s , attachée à l'extrémité longue (L_p) du bras.
- Angle de rotation du bras : θ , mesuré par rapport à la verticale
- Angle de la fronde : ϕ , mesuré par rapport au bras.
- **L'énergie mécanique est conservée.**



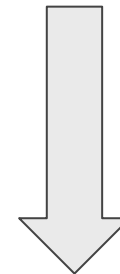
On se retrouve avec un pendule double



tentative de résolution en référentiel
non galiléen en négligeant F_{ic}

tentative de résolution par la
méthode d'Euler sur le moment
d'inertie

recherche d'autres solutions
abordables



échec

Bilan de cette deuxième approche calculatoire

- Mise à l'écart de l'hypothèse comme quoi l'énergie n'est transmise qu'au projectile
- Un modèle qui sous-estime la portée réelle mais reste plutôt fiable grâce au moment d'inertie
- Insatisfaction de ne pas avoir pu résoudre le pendule double qui aurait été plus exact

III - Pointage sur MecaChrono



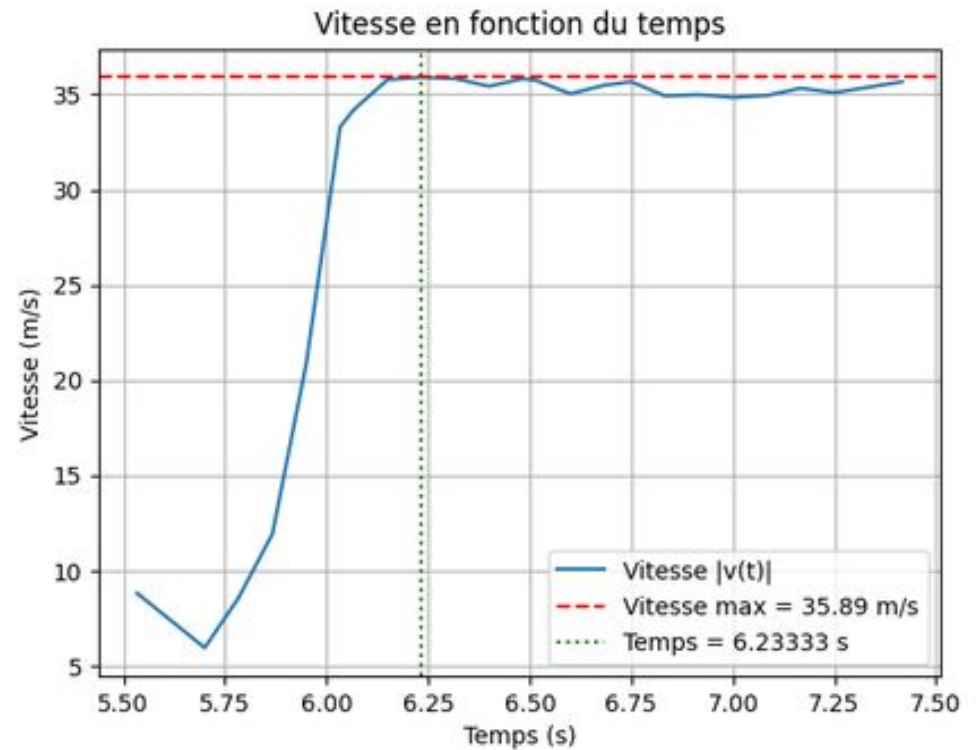
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Exemple de données (remplace-les par les tiennes)
5 t = np.array([ 9.48333, 9.51667, 9.55, 9.58333, 9.61666, 9.65, 9.68333, 9.71666, 9.75, 9.78333])
6 x = np.array([-0.134164, -0.626099, -1.02859, -1.34164, -1.69941, -1.8783, -2.05718, -2.23607, -2.41496, -2.59385])
7 y = np.array([0.0447214, 0, 0, 0, 0.134164, 0.223607, 0.491935, 0.849706, 1.07331, 1.386])
8
9 # Calcul des composantes de la vitesse
10 vx = np.gradient(x, t) # dérivée de x par rapport au temps
11 vy = np.gradient(y, t) # dérivée de y par rapport au temps
12
13 # Calcul de la norme de la vitesse
14 v = np.sqrt(vx**2 + vy**2)
15
16 # Vitesse maximale et temps associé
17 v_max = np.max(v)
18 t_vmax = t[np.argmax(v)]
19
20 print(f"Vitesse maximale : {v_max:.2f} m/s à t = {t_vmax} s")
21
22 # Affichage graphique
23 plt.plot(t, v, label='Vitesse |v(t)|')
24 plt.axhline(v_max, color='r', linestyle='--', label=f'Vitesse max = {v_max:.2f} m/s')
25 plt.axvline(t_vmax, color='g', linestyle=':', label=f'Temps = {t_vmax} s')
26 plt.xlabel('Temps (s)')
27 plt.ylabel('Vitesse (m/s)')
28 plt.title('Vitesse en fonction du temps')
29 plt.grid(True)
30 plt.legend()
31 plt.show()

```

programme qui avec les x,y,t renvoie la vitesse
absolue du projectile

$$v_{\max} = 36 \text{ m/s}$$

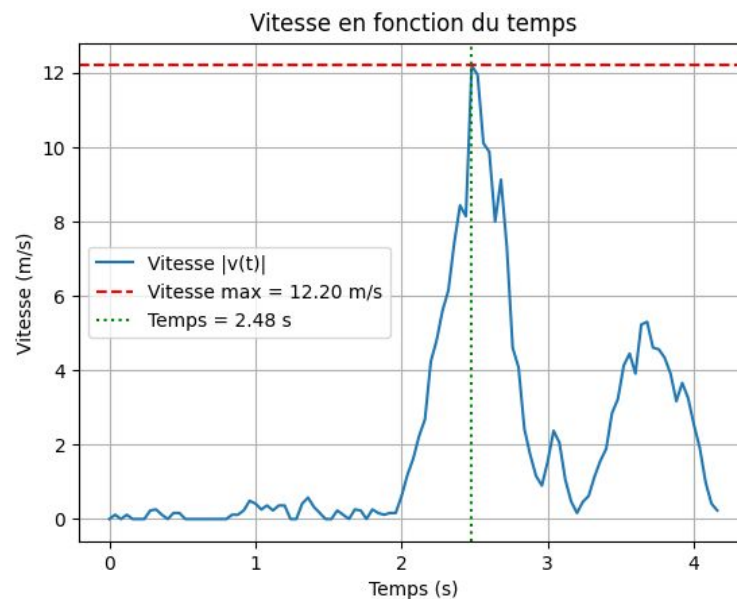
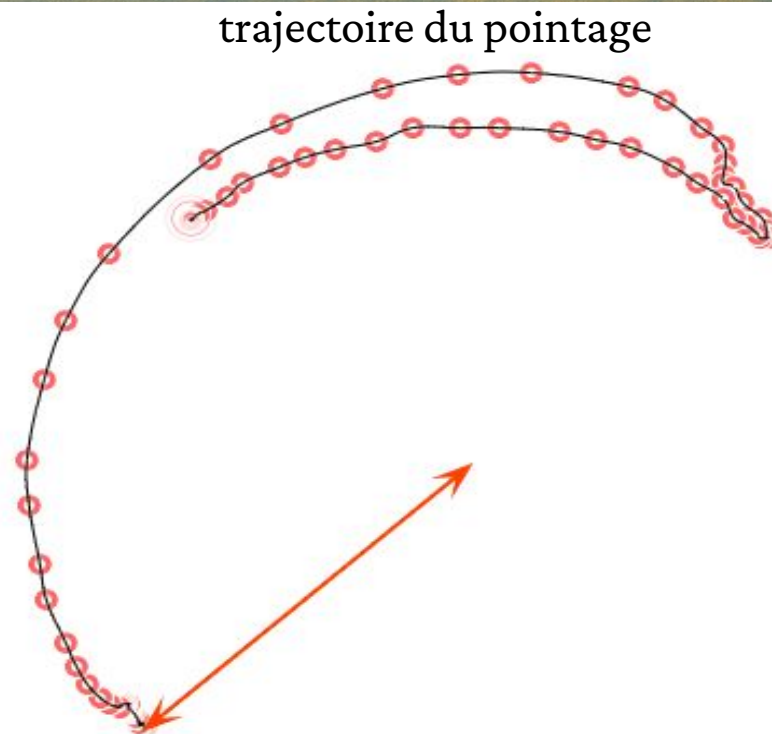


en réutilisant $0 = -\frac{g}{v_0^2}x^2 + x + h$

on obtient une portée de 137m

Même
démarche
pour la
vitesse
angulaire:

$$\omega = v/r$$
$$\omega = 6,4 \text{ rad/s}$$



Bilan de cette
troisième
approche
exploitant les
résultats réels
grâce à l'outil
informatique

- Apport de la technologie par rapport à ce qui était faisable à l'époque
- Obtention de valeurs réelles sans hypothèse simplificatrice
- Nouvelles données qui pourront servir pour des comparaisons



IV - Comparaison: approche calculatoire | résultat réel

	calcul	réel
vitesse angulaire	6,65 rad/s	6,4 rad/s
vitesse du projectile initiale	25,3m/s (surestimé)	36 m/s
portée	66,2 m	137 m

Bilan final et synthèse des résultats

- Calcul de la vitesse angulaire plutôt exact
- Vitesses de libération très différentes dû au double pendule ($\times 1,4$)
- Portée théorique $\ll$ Portée réelle donc il y a une possible étude de la trajectoire plus approfondie

Et le travail de groupe dans
tout ça ?



Travail sur la trajectoire et l'impact de l'effet magnus

- Comparaison avec et sans magnus
- obtention de tirs plus long et précis
- amélioration de la portée de plus de 10%



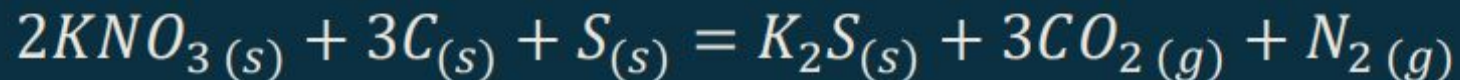


Travail sur la comparaison avec le canon

- Sensiblement la même puissance
- Moins précis que le trébuchet
- plus grande cadence de tirs et maniabilité
- Et surtout une grande évolutivité

A detailed oil painting of a medieval castle with multiple towers and a church in the distance, under a cloudy sky. The castle is built on a hill, with a dirt path leading up to it. The church is visible in the background on the right. The sky is filled with large, white clouds. The overall style is realistic and detailed.

Conclusion



$$\left. \begin{array}{l} \Delta_r H^\circ = -568,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ = 622,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow K^\circ = e^{-\frac{\Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ}{RT}} = 1,5 \cdot 10^{132}$$

$$E_{chimique} = n_{réaction} |\Delta_r H^\circ|$$

$$E_{utile} = \eta \cdot E_{chimique}$$

$$\eta \approx 0,1$$

$$E_{utile} = E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{utile}}{m}} = 234 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

FORCE DE POUSSÉE ET ÉNERGIE À L'IMPACT

$$F = P \cdot S$$

$$P = 313 \text{ bars}$$

$$S = \pi r^2 = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow F_{\text{poussée}} \approx 7,5 \text{ kN}$$

$$E_{c \text{ canon réel}} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ J} > E_{c \text{ trébuchet réel}} = 1,87 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Cependant, il y a un problème, la trajectoire n'est plus parabolique à ces vitesses.

TRAJECTOIRE DE TARTAGLIA

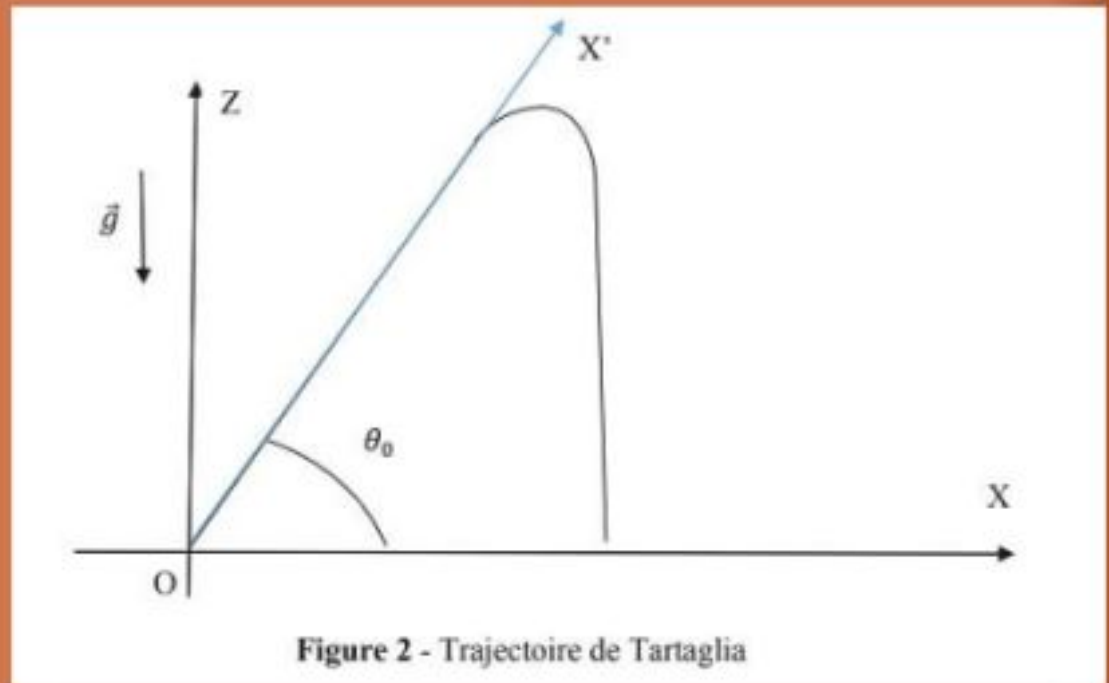
3 phases :

1- Mouvement

rectiligne décéléré

2- Phase de transition

3- Chute libre



Cette trajectoire s'applique pour :

$$\|\vec{F}\| \geq \|m\vec{g}\|$$

$$\Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x S}} = 209 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

CALCUL DE PRESSION

$$K^0 = Q_{r,eq} = \frac{x_{CO_2}^3 \cdot x_{N_2} \cdot P^4}{P_0^4} = 1,5 \cdot 10^{132}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt[4]{\frac{P_0^4 \cdot K^0}{x_{CO_2}^3 \cdot x_{N_2}}} = 2 \cdot 10^{38} \text{ Pa}$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$