

Partie 1

Exercice 1 Déterminer rang, noyau et Image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M \mapsto AM$.
Décrire $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ (dimensions, bases).

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. Si existence, donner A^{-1} . Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{B} = \{E_{i,j}, (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2\}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$ et $E_{i,j}E_{k,l} = E_{i,l}$ si $j = k$.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. La formule reste-t-elle valable pour les entiers négatifs?

Exercice 6 On note J la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^n pour tout entier n .
2. On pose $A = 2I + 3J$. Calculer les puissances de A .
3. Généralisation : calculer les puissances de $B = aI + bJ$.

Exercice 7 On considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{C}_n[X]$ définis par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], f(P) = P + P' \text{ et } g(P) = P - P' + P'' \dots + (-1)^n P^{(n)}.$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer son inverse.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A ainsi que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.

2. A est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 9 Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Déterminer une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}TP$

Calculer T^n , puis en déduire A^n .

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $rg(f) = tr(f) = 1$.

Montrer que f est un projecteur.

Exercice 12

1. Soit E un espace vectoriel de dimension p . Donner la dimension de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
2. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. On définit $T: v \mapsto u \circ v - v \circ u$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
3. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^2$ et qu'il existe une base (e_1, e_2) telle que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.
 - (a) Donner la matrice de u dans la base (e_1, e_2) .
 - (b) Montrer que u est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
 - (c) Calculer T^2 et T^3 .
 - (d) Donner l'indice de nilpotence de T .
4. On revient au cas général (E de dimension p et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente).
 Montrer que $T^k(v) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} \circ v \circ u^i$.
5. Montrer que T est nilpotente.

Exercice 13 Matrices à diagonale strictement dominante :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

1. Donner un exemple de matrice non diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ qui soit à diagonale strictement dominante.
2. On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |x_1| \geq |x_i|)$.
 Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$.
4. En déduire que A est inversible.

Partie 2 : Un exercice plus approfondi

Exercice 14 Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On se propose de décrire les endomorphismes u de E vérifiant $u^3 = -u$.

1 - Un exemple

Dans cette partie seulement, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E , et l'on considère l'application

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} -x - z \\ -2x - y - z \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. Déterminer la dimension et une base de $\text{Im}(f)$.
3. En utilisant les bases de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
4. Montrer que f induit un automorphisme de $\text{Im}(f)$ vérifiant $(f|_{\text{Im}(f)})^2 = -\text{id}_{\text{Im}(f)}$.
5. Montrer que $f^3 = -f$.
6. Montrer que si e est un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$, alors $\{e, f(e)\}$ est une base de $\text{Im}(f)$.
7. Construire explicitement une base $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E telle que

$$f(e'_1) = e'_2, \quad f(e'_2) = -e'_1, \quad f(e'_3) = 0.$$

8. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.

2 - Etude du cas où u est inversible

Dans cette partie, on suppose que u est un automorphisme de E vérifiant $u^3 = -u$.

1. Que vaut u^2 ?
2. Soit x un vecteur non nul de E . Montrer que la famille $\{x, u(x)\}$ est libre dans E , et que le sous-espace $V_x = \text{Vect}(\{x, u(x)\})$ est u -stable.
3. Soit F un sous-espace vectoriel u -stable de E , et x un vecteur de E n'appartenant pas à F . Montrer qu'alors

$$F + V_x = F \oplus V_x.$$

4. En déduire l'existence d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E telle que la famille de vecteurs $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), \dots, x_n, u(x_n))$ soit une base de E .
5. Que dire de la dimension de E ?

3 - Etude du cas où u n'est pas inversible

Dans cette partie, on suppose que u est un endomorphisme de E , non nul, non bijectif, vérifiant $u^3 = -u$.

1. Montrer que $1 \leq \dim \text{Ker}(u) \leq n - 1$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
3. Montrer que u induit un automorphisme de $\text{Im}(u)$.
4. En déduire l'existence d'une base de E de la forme : $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), x_p, u(x_p), h_1, \dots, h_q)$, où les vecteurs h_i appartiennent au noyau de u . Donner la matrice de u dans cette base.
5. Déduire de ce problème la forme générale des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + A = 0$.

Partie 3 : Exercices issus de la banque CCINP

1. (ex 60, Algèbre)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- (a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- (b) f est-il surjectif ?
- (c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- (d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

2. (ex 71, Algèbre)

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- (b) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.