

**NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance.**

**Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».**

## I : Compléments d'algèbre linéaire

### 1) Interpolation de Lagrange

Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$ . Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points est le polynôme constant égal à 1.

### 2) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition  $E = \bigoplus E_i$ .

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie,  $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ , avec égalité si et seulement si la somme est directe.

### 3) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si  $u$  et  $v$  commutent alors le noyau et l'image de  $u$  sont stables par  $v$ .

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit).

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

### 4) Trace Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée.

Relation  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

Invariance de la trace par similitude (c'est à dire : deux matrices semblables ont même trace). Notation  $\text{Tr}(A)$ .

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

**Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées** Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Relation  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .

Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.

Deux polynômes de l'endomorphisme  $u$  commutent. Le noyau de  $P(u)$  est stable par  $u$ .

Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

## II : Révisions d'analyse

- **Suites** : tout le programme de PCSI
- **Fonctions** : tout le programme de PCSI

En particulier, **les développements limités et équivalents usuels doivent être sus** sur le bout des doigts (voir formulaire en ligne), ainsi que les **théorèmes de croissances comparées** (voir dernière page du poly de révision sur les fonctions). Et les formules de **trigonométrie** (voir formulaire en ligne)....

## III : Questions de cours

- TOUS LES ENONCES DOIVENT ETRE CONNUS!
- Base adaptée à la décomposition d'un espace  $E$  en somme directe de sous-espaces vectoriels (démonstration)
- Polynômes de Lagrange : Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$  (démonstration)
- Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base (démonstration).
- Trace :  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  (démonstration)