

***Exercice 1** Séries télescopiques :

1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - 1}$ en éléments simples. Puis montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et calculer sa somme.
2. ♥ Déterminer la nature et la somme de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$.
3. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum \frac{1}{n(n+p)}$ converge. On note L_p sa somme.

On admet que : $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où γ est une constante (d'Euler) et $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Exprimer L_p en fonction de $H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$.

4. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.
- (b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{a}{n^2 - n + 1} + \frac{b}{n^2 + n + 1}$.
- (c) En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

****Exercice 2** Calculer la somme suivante, sans oublier de justifier son existence : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$.♥***Exercice 3** Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série de terme général u_n .

- a) $u_n = \frac{n^4 \ln(3n)}{e^n}$. b) $u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$. c) $u_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$.. d) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
- e) $u_n = \ln(\cos(1/2n))$ f) $\ln(1 - \frac{1}{2n})$. g) $u_n = \ln \left(\frac{2 + \sin(\frac{1}{n})}{2 - \sin(\frac{1}{n})} \right)$ pour $n > 0$

***Exercice 4** Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_n = \frac{n^2 - \cos n}{e^n + 3}$
4. $u_n = 2n \sin \left(\frac{1}{n} \right)$
5. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$
6. $u_n = \frac{e^{in}}{n^3}$
7. $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2} \right)$
8. $u_n = \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}}}$
9. $u_n = \frac{n \cos n}{2^n}$
10. $u_n = \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \cos(n)$
11. $u_n = \frac{n!}{n^n}$

Exercice 5** Étudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^\alpha} \right)$. Préciser pour quelles valeurs u_n tend vers 0. Montrer que : si (u_n) converge vers une limite non nulle, alors sa limite est un réel strictement positif.*Exercice 6** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^n$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.****Exercice 7** 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{1 + 4^{2n}}$.

2. On note R_n le reste d'ordre n pour tout $n \geq 0$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq R_n \leq \frac{1}{4 \cdot 5^n}$.
3. Comment obtenir une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près ?

♥****Exercice 8** Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$.

♡****Exercice 9** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2}$.

Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Indication : comparer $\sum_{k=1}^N \frac{1}{(n+k)^2}$ à une intégrale puis en déduire un minoration de u_n .

♡****Exercice 10** Justifier l'existence de $u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p!}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

♡***Exercice 11** Justifier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ puis calculer la somme (en utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$).

* **Exercice 12** Soit la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

1. Exprimer $\sin(\theta + n\pi)$ en fonction de n et de $\sin \theta$.
2. Démontrer que $\sum u_n$ est une série alternée et étudier la convergence de cette série.

***Exercice 13** Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

***Exercice 14** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ est alternée et qu'elle converge.

Indication : on montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

****Exercice 15** Nature des séries dont le terme général est :

$$(a) \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n-3} \quad (b) \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \quad u_n = \int_n^{(n+1)} \frac{\cos(\pi x)}{1+x} dx$$

***Exercice 16** Soit $x \in]-1; 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Convergence et somme des séries $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$.

♡****Exercice 17** Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$. Montrer que la série de terme général $P_{n+1} - P_n$ est convergente. En déduire que la suite (P_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

♡***Exercice 18** On admettra que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2(n-p)!}$.

2. Même question avec la série de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$.

♡* **Exercice 19** Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_0 = 0$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. On considère le produit de Cauchy de cette série par elle-même, c'est à dire la série de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

Montrer $\sum v_n$ est divergente. (On pourra être amené à étudier la fonction f définie par $f(x) = x(n-x)$.)

♥* **Exercice 20** Démonstration de la formule de Stirling.

1. Dans cette question, on veut prouver l'existence d'un réel $K > 0$, tel que $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On note $a_n = \frac{e^n n!}{\sqrt{nn^n}}$ et $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$

- (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
 (b) Conclure.
2. Dans cette question, on va déterminer la valeur exacte de la constante K , à l'aide des intégrales

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt.$$

- (a) Calculer I_0 et I_1 . A l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n .
 En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} (on donnera les résultats avec des factorielles).
 (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_{n+1} \sim I_n$.
 (c) Montrer que la suite $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de I_n .
 (d) Déterminer la valeur de la constante K .

Exercices d'oral**Exercice 21**

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (a) **Cas** $\alpha \leq 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
 (b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
 2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 23

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
 On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
 Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature..

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice 24 On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
 2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
 3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?