

* **Exercice 1** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que : si $\ell < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Montrer que : si $\ell > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Peut-on conclure si $\ell = 1$?

2. Appliquer ces résultats aux exemples qui suivent :

$$u_n = \frac{a^n}{n!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad v_n = \frac{n^n}{n!}, \quad w_n = \frac{a^n}{n^p} \text{ avec } a \in \mathbb{R}, a > 1 \text{ et } p \in \mathbb{N}.$$

♡ * **Exercice 2** Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ convergent vers une limite commune.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

♡ * **Exercice 3** Déterminer les limites des suites définies par :

$$1. u_n = \ln(\text{ch}(n)) - n$$

$$2. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2} \quad (\text{penser aux sommes de Riemann})$$

$$3. u_n = \left(2a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^n$$

$$4. u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)} \right)^{n^2}.$$

Indication : Penser que, pour $x > 0$, on a $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \dots$

* **Exercice 4** Donner un équivalent simple des suites suivantes : $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$, $v_n = \sin\left(\frac{(n^2 + n + 1)\pi}{n + 1}\right)$

♡ ** **Exercice 5** Donner les limites des suites suivantes :

$$1. I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

$$2. v_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n} dx \text{ et } w_n = \int_0^\pi \frac{n \sin(x)}{x+n} dx$$

** **Exercice 6** Montrer que $\sum_{k=1}^n e^{k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{n^2}$.

Suites récurrentes

* **Exercice 7** Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$.

* **Exercice 8** Etudier la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

Suites définies de manière implicite

♡** **Exercice 9** Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Montrez que : $\forall n \geq 1$, on a $x_n < 1$.

3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Conclure sur la convergence éventuelle de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Montrer que $\lim x_n = 1$.

5. Dans la suite de l'exercice, on note $\alpha_n = 1 - x_n$.

(a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \alpha_n)}{\alpha_n} = -1$. Puis montrer que : $n\alpha_n \sim -\ln(\alpha_n)$.

(b) Quelle est la limite de $-\ln(\alpha_n)$? En déduire enfin que : $-\ln(n) \sim \ln(\alpha_n)$, puis un équivalent simple de α_n .

♡** **Exercice 10** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction ϕ_n définie pour $x \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ par : $\phi_n(x) = \tan(x) - x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$. (Indication : pour tout n , on pourra étudier les variations de ϕ_n)

2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.

3. On pose $v_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$. Calculer $\tan(v_n)$. En déduire que $v_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$ et que $v_n \sim \frac{1}{n\pi}$, puis que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercices d'oral

Exercice 11

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 12 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice 13 Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .

2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .