Exercice 1 Etudier les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\tan^2(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2e^{3x}-5e^x+1}{3e^{2x}-7e^{3x}}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+2)}{3x^2+4x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)-1}$. On pourra effectuer le changement de variable $X = x + \frac{\pi}{2}$.
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$

Solution: Résultats : $1, +\infty, 0, 1, 1, 1$

Exercice 2 Déterminer un équivalent des expressions suivantes et leur éventuelle limite au point considéré.

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\tan(x+1)}$ en -1
2. $\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ en 0
3. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$
4. $2x+\sqrt{4x^2+3x+2}$ en $+\infty$
5. $\dfrac{e^x}{1-x^2}$ en 1
6. $\dfrac{(e^x-e^5)^2}{\sqrt[3]{x+3}-2}$ en 5
7. $\dfrac{1-\cos(7x)+\sin(5x)}{\sin(x)\tan(3x)\cos(9x)}$ en 0

Solution: Résultats : $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, e^2, $4x$, $\dfrac{e}{2}\dfrac{1}{1-x}$, $12e^{10}(x-5)$, $\dfrac{5}{3x}$

Exercice 3 Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_5(0)$ de : $3\sin(2x)-2\sin(3x)$
2. $DL_3(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
3. $DL_4(0)$ de : $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$
4. $DL_4(0)$ de : $(1+\sin(x))^x$
5. $DL_2(1)$ de : $\dfrac{1+\sin(x-1)}{1+\ln(x)}$
6. $DL_5(0)$ de : $\text{Arctan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
7. $DL_2(1)$ de : $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Solution:

1. $5x^3-\dfrac{13}{4}x^5+o(x^5)$
2. $x+\frac{-3}{2}\cdot x^2+\frac{11}{6}\cdot x^3+o(x^3)$
3. $-\frac{1}{6}\cdot x^2-\frac{1}{180}\cdot x^4+o(x^4)$
4. $1+x^2-\frac{1}{2}\cdot x^3+\frac{2}{3}\cdot x^4+o(x^4)$
5. $1+\frac{1}{2}\cdot (x-1)^2+o((x-1)^2)$
6. $\frac{1}{4}\cdot\pi-x+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{5}\cdot x^5+o(x^5)$
7. $(x-1)+\frac{-5}{2}\cdot (x-1)^2+o((x-1)^2)$