****Exercice 8** On considère les familles de n enfants ($n \geq 2$) et on s'intéresse aux différentes répartitions des sexes : M et F. On note M_i l'événement "le i-ème enfant est du sexe masculin" et on suppose que pour tout i, $P(M_i) = 1/2$, les événements $M_1, \cdots, M_n$ étant mutuellement indépendants. On considère les évéments : A="la famille a des enfants des deux sexes" et B="la famille a au plus une fille".

1. Etudier l'indépendance de ces deux événements dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$.
2. Faire l'étude dans le cas général. Indication : au cours des calculs, on poura être amené à considérer la suite $u_n = 2^n - 2n - 2$, dont on pourra montrer qu'elle est strictement croissante pour $n \geq 2$

Solution:

1. **Pour n=2**. A-t-on $P(A \cap B) = P(A)P(B)$? On considère que $\Omega = \{(F,F),(G,G),(F,G),(G,F)\}$, où la lettre F désigne une fille, la lettre G désigne un garçon, et chaque couple représente une fratrie possible, dans l'ordre d'arrivée des enfants. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur Ω.
   $P(A) = 2/4 = 1/2$ et $P(B) = 3/4$.
   $P(A \cap B) = 2/4 = 1/2$ donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants pour } n = 2.}$
   Pour n=3. On raisonne de manière analogue en considérant que Ω est l'ensemble des triplets de lettre F et G. Ainsi $\text{card}(\Omega) = 2^3$ et on considère qu'il y a équiprobabilité sur Ω.
   $P(A) = P(\{(F,G,G),(G,F,G),(G,G,F),(G,F,F),(F,G,F),(F,F,G)\})$. J'ai énuméré toutes les fratries possibles, en prenant d'abord celles avec une fille et deux garçons, puis celles avec un garçon et deux filles.
   Ainsi $P(A) = 6/8 = 3/4$.

   $B = \{(G,G,G),(F,G,G),(G,F,G),(G,G,F)\}$.
   J'ai énuméré les cas possibles en prenant d'abord la fratrie sans fille, puis les trois fratries possibles avec une seule fille.
   Ainsi est $P(B) = 4/8 = 1/2$.
   Enfin $P(A \cap B) = P(\{(F,G,G),(G,F,G),(G,G,F)\}) = 3/8$.
   $\boxed{\text{Donc } A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour } n = 3.}$
2. **Cas général.** On considère ici $\Omega = \{F,G\}^n$ l'ensemble des n-uplets de lettres F et G, chaque n-uplet représentant une fratrie dans l'ordre d'arrivée des enfants. On suppose toujours équiprobabilité sur Ω. Et l'on note que $\text{card}(\Omega) = 2^n$.
   On remarque que $\overline{A}$ = " avoir seulement des garçons ou seulement des filles".
   Ainsi $\overline{A} = \{(F,F,\cdots F),\ (G,G,\cdots,G)\}$ et $\text{card}(\overline{A}) = 2$.
   Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Il y a n fratries contenant exactement une fille (la fille pouvant être entre position 1 ou 2 ou .... ou n) et une fratrie ne contenant aucune fille. Donc $\text{card}(B) = n + 1$ et ainsi $P(B) = (1+n)/2^n$.
   Enfin $P(A \cap B) = n/2^n$ car $A \cap B =$ "la fratrie contient exactement une fille".
   Donc A et B sont indépendants si et seulement si : $\dfrac{2^n - 2}{2^n} \times \dfrac{n+1}{2^n} = \dfrac{n}{2^n}$ c'est à dire si ... après calculs : $2^n = 2n + 2$.
   Posons $u_n = 2^n - 2n - 2$. Alors $u_{n+1} - u_n = 2^n - 2 > 0$ pour $n \geq 2$.
   Donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 2$. Or $u_3 = 0$ donc $u_n > 0$ pour $n > 3$.
   $\boxed{\text{Donc } A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } n = 3.}$