♡**__Exercice 10__ **Partie A : Calcul matriciel** On considère les matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&2&4\\3&2&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&3\\-1&1&3\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{-5}{6}\\\frac{1}{5}&\frac{-2}{15}&\frac{-2}{15}\\\frac{1}{10}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices QR et RQ puis $D=RAQ$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer la matrice A^n en fonction de la matrice D^n et des matrices Q et R.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

Partie B : Processus stochastique

- On a trois urnes : une urne blanche, une urne rouge, une urne verte.
  L'urne blanche contient une boule blanche et une boule verte.
  L'urne rouge contient une boule blanche, une boule rouge et une boule verte.
  L'urne verte contient une boule blanche et deux boules rouges.
- On procède à des tirages successifs d'une boule dans l'une de ces urnes. A chaque tirage d'une boule dans une urne, toues les boules présentes ont la même probabilité d'être tirées. Après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne d'où elle provient.
- On choisit au hasard une urne. On note respectivement B_0 (*resp.* R_0, V_0) l'événement : « on choisit initialement l'urne blanche (*resp.* rouge, verte)» et l'on désigne par b_0, r_0, v_0 les probabilités respectives de ces événements, avec $b_0+r_0+v_0=1$. On tire ensuite au hasard dans l'urne choisie.
- La couleur de chaque boule tirée est la couleur de l'urne dans laquelle a lieu le tirage suivant.
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note respectivement B_n (*resp.* R_n, V_n) l'événement : «on obtient la boule blanche (*resp.* rouge, verte) lors du n-ième tirage» et l'on désigne par b_n, r_n, v_n les probabilités respectives de ces événements.

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $X_n=\begin{pmatrix}b_n\\r_n\\v_n\end{pmatrix}$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de $b_{n+1}, r_{n+1}, v_{n+1}$ en fonction de b_n, r_n, v_n.
2. Déterminer la matrice $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait : $X_{n+1}=MX_n$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de b_n, r_n, v_n en fonction de b_0, r_0, v_0 et n. (Indication : utiliser A.3)
4. Déterminer les limites de b_n, r_n et v_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution: Partie A

1. On trouve que Q et R sont inverses l'une de l'autre.
2. RAQ =Diag(-2,1,6).
3. On en déduit, par récurrence :$A^n=QD^nR$.

$$A^n=\left(\begin{array}{c|c|c}\frac{(2*6^n)}{5}+\frac{3}{5}&\frac{(2*6^n)}{5}-\frac{2}{5}&\frac{(2*6^n)}{5}-\frac{2}{5}\\\frac{(-2)^n}{2}+\frac{3*6^n}{10}+\frac{-4}{5}&\frac{(-2)^n}{6}+\frac{(3*6^n)}{10}+\frac{8}{15}&\frac{-5*(-2)^n}{6}+\frac{(3*6^n)}{10}+\frac{8}{15}\\\frac{-(-2)^n}{2}+\frac{3*6^n}{10}+\frac{1}{5}&\frac{-(-2)^n}{6}+\frac{(3*6^n)}{10}-\frac{2}{15}&\frac{5*(-2)^n}{6}+\frac{3*6^n}{10}-\frac{2}{15}\end{array}\right)$$

Partie B

1. (B_n, R_n, V_n) est un système complet d'événements. On utilise la formule des probabilités totales, avec la convention usuelle suivante : si $P(A)=0$, alors on convient que $P(A)\times P_A(B)=0$.
   On obtient :
   $$P(B_{n+1}=P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(R_n)P_{R_n}(B_{n+1})+P(V_n)P_{V_n}(B_{n+1})$$

   Ainsi : $\boxed{b_{n+1}=(1/2)b_n+(1/3)r_n+(1/3)v_n}$

   De même : $\boxed{r_{n+1}=0*b_n+(1/3)r_n+(2/3)v_n}$

   Et : $\boxed{v_{n+1}=(1/2)b_n+(1/3)r_n+0*v_n}$

2. $X_{n+1} = (1/6)AX_n$ donc par récurrence $X_n = (1/6^n)A^nX_0$ et en utilisant l'expression de A^n calculée précédemment on trouve après calculs :

$$b_n = (2/5) + (1/6^n)((3/5)b_0 - (2/5)r_0 - (2/5)v_0) = ... = (2/5)) + (1/6^n)(b_0 - (2/5))$$

$$r_n = .. = (3/10) + (1/6^n)[-(4/5)b_0 + (8/15)r_0 + (8/15)v_0] + ((-1)^n/3^n) \times [b_0/2 + r_0/6 - 5r_0/6]$$

$$v_n = (3/10) + (1/6^n)[b_0/5 - 2r_0/15 - 2v_0/15] + ((-1)^n/3^n) \times [-b_0/2 - r_0/6 + 5v_0/6]$$

3. $\lim b_n = 2/5$, $\lim r_n = 3/10$ et $\lim v_n = 3/10$