Lycée Aristide Briand, PC, 2026/2027 **Programme de la semaine n°7, du 09/11 au 13/11 2026**

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Probabilités sur un univers fini** : tout exercice sur le programme de PCSI.
2. **Ensembles dénombrables, familles sommables** : voir le programme précédent.
3. **Probabilités discrètes**

   (a) Univers, événements : voir le programme précédent.

   (b) Probabilité : voir le programme précédent.

   (c) Probabilités conditionnelles

   Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A|B)=P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

   L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule de Bayes.

   Formule des probabilités totales : Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors : $P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B|A_n)P(A_n)$. *On rappelle la convention* : $P(B|A_n)P(A_n)=0$ lorsque $P(A_n)=0$.

   (d) Événements indépendants Indépendance de deux événements.

   Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à : $P(A|B)=P(A)$.

   Indépendance d'une famille finie d'événements. L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.

   Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi. Extension au cas de n événements.
4. **Variables aléatoires discrètes : Premier épisode.**

   (a) **Généralités.**

   Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x\in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. L'univers Ω n'est en général pas explicité.

   Notations $(X=x)$, $\{X=x\}$, $(X\in A)$. Notation $(X\geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

   Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.

   La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$.

   On note $X\sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loin.

   Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$.

   (b) **Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X**

   X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.

   (c) Théorème d'antirépartition : Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Les définitions du chapitre de probabilités discrètes DOIVENT être connues.
- Théorème de continuité croissante (grandes lignes de la preuve).
- Etre capable de dire ce que l'on admet du modèle décrivant l'expérience "on tire indéfiniment à Pile ou Face".
- la probabilité d'obtenir indéfiniment Pile est nulle (démo)
- Sous additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\Big)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n)$ (grandes lignes de la preuve)
- Formule des probabilités totales
- **Exercice type** : On a 3 pièces équilibrées, une pièce ayant ses deux côtés blancs, les deux autres ayant une face blanche et une face noire. On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers indépendants de cette pièce.
  (a) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au premier lancer ?
  (b) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" aux n premiers lancers ?
  (c) Sachant que l'on a obtenu n fois de suite "blanc", quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce unicolore ?