On considère pour commencer des fonctions à valeurs **réelles**.

Définition 1 Soit $[a, b]$ un **segment** et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ un nombre fini de réels. On dit que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ est une <u>subdivision</u> du segment $[a, b]$.

Définition 2 Soit $[a, b]$ un segment $(a < b)$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est <u>en escalier</u> s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ et des réels $b_0, \ldots, b_{n-1}$ tels que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $f(x) = b_i$.
On notera $Esc([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Remarque 1 $Esc([a, b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Theorème-Definition 1 Soit $f \in Esc([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$), soit $s = (a_i)_{i=0\cdots n}$ adaptée à f. On a donc :

$$\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall n \in \{0, \cdots, n-1\},\ \forall x \in]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \alpha_i.$$

Alors le réel $I = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \alpha_i$ ne dépend pas de la subdivision choisie. On l'appelle *intégrale de la fonction f sur* $[a, b]$ et il est noté : $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Theorème-Definition 2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, où $a < b$. On considère :
$E_1 = \{\varphi \in Esc([a, b], \mathbb{R}) \text{ telles que } \varphi \leq f\}$ et $E_2 = \{\psi \in Esc([a, b], \mathbb{R}) \text{ telles que } f \leq \psi\}$
L'ensemble $I_1 = \left\{\displaystyle\int_a^b \varphi,\ \text{ où } \varphi \in E_1\right\}$ est non vide et majoré. Il admet donc une borne supérieure notée $I^-(f)$.
L'ensemble $I_2 = \left\{\displaystyle\int_a^b \psi,\ \text{ où } \psi \in E_2\right\}$ est non vide et minoré. Il admet donc une borne inférieure notée $I^+(f)$.
De plus $I^-(f) = I^+(f)$ c'est à dire $\sup\left\{\displaystyle\int_a^b \varphi \text{ où } \varphi \in E_1\right\} = \inf\left\{\displaystyle\int_a^b \psi,\ \text{ où } \psi \in E_2\right\}$.
le réel $I^-(f) = I^+(f)$ est noté :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x)dx \text{ ou encore } \int_{[a,b]} f$$

<u>Notation</u> : l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ peut être notée indifféremment :

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

On définit ensuite $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ pour $a \geq b$ en posant :

Proposition 1 1. **<u>Linéarité</u>**
Soient f et g deux fonctions continues sur I, soit $(a, b) \in I^2$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

2. **<u>Positivité</u>**. <u>On suppose $a \leq b$.</u>
Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$
3. **<u>Croissance</u>**. <u>On suppose $a \leq b$.</u> Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et telles que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors : $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Remarque 2 Pour l'item 3 de la proposition précédente : Réciproque fausse !

Proposition 2 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). Alors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$

Proposition 3 **Relation de Chasles**
Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

Théorème 1 **Stricte positivité**

i) Soit f continue et **positive** sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Alors : $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

ii) Soit f continue, **positive** sur $[a,b]$ et **différente de la fonction nulle sur** $[a,b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Remarque 3 ii) est la contraposée de i).

Définition 3 Soient f une fonction continue sur I et soit $(a,b) \in I^2$. Si $a > b$ on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Proposition 4 **Relation de Chasles**
Soient f une fonction continue sur I et soit $(a,b,c) \in I^3$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

Proposition 5 **Sommes de Riemann**. Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque 4
1. Très souvent $a = 0$ et $b = 1$, ce qui donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.
2. Le résultat reste valable même si l'indice k varie entre 1 et n ou entre 1 et $n-1$.

Théorème 2 **Théorème fondamental de l'intégration**
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle réel I et soit $a \in I$. Alors la fonction

$$F\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Remarque 5 Ce théorème est parfois appelé **théorème fondamental de l'analyse**.

Corollaire 1
1. Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ admet des primitives sur $[a,b]$.
2. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une **primitive** de f sur $[a,b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Remarque 6 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Remarque 7 Soit f une fonction continue sur I. Soient u et v deux fonctions dérivables sur J et à valeurs dans I. Alors la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable et sa dérivée vaut :

Quel est le domaine de définition de la fonction G définie par : $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \frac{e^t}{t}dt$? Justifier sa dérivabilité et calculer $G'(x)$.

Même question pour la fonction H définie par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}dt$.

Primitives usuelles

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{F}(\mathbf{x})$
x^n	
$\dfrac{1}{x^n}$	
x^α	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$\exp(x)$	
a^x	
$\dfrac{1}{1-x^2}$	

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{F}(\mathbf{x})$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	
$1+(\tan(x))^2$	
$1+(\mathrm{cotan}(x))^2$	
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	
$\mathrm{ch}(x)$	
$\mathrm{sh}(x)$	

Si on a une expression de la forme $g(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$ (avec $F' = f$), une primitive de g est

Donner par exemple des primitives des fonctions f définies par :

$f(x) = 2x\sin(x^2)$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$, $f(x) = \sin(x) \cdot \exp(\cos(x))$...

On doit aussi savoir qu'une primitive de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est

Attention : cela suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I, donc que u est de signe constant (car continue)

Trouver par exemple des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $f_2(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Peut-on faire de même pour $f_3(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$?

Trouver des primitives de : $\tan$, cotan en précisant bien les intervalles sur lesquels on travaille.

Théorème 3 **Intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$

Remarque 8 Cela s'applique

- aux intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b e^t P(t)dt$ où p est une fonction polynomiale
- au calcul de $\displaystyle\int_a^b \ln(t)dt$ ou de $\displaystyle\int_a^b \arctan(t)dt$....

Théorème 4 Soient I et J deux intervalles. Soit $f \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{K})$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\varphi(I) \subset J$. Alors $f \circ \varphi$ est bien définie et continue sur I. De plus :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_a^b f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Remarque 9 Calcul à savoir faire absolument : Trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ ou de $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ ou de $\dfrac{1}{x^2+2x+9}$ ou de $\dfrac{x^2}{x^2+2x+9}$

Attention : vous avez vu cette formule en PTSI. Elle sera au programme de la PT*. Vous devez la connaîtyre en en connaître la démonstration. Si vous souhaitez qu'elle soit revue en cours, il faut le dire....

Théorème 5 **Formule de Taylor avec reste intégral** Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et soit $a \in I$. Alors :

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Généralisation pour des fonctions à valeurs **complexes** : on définit l'intégrale d'une fonction continue à l'aide des parties réelles et imaginaires. Les propriétés suivantes sont notamment conservées : linéarité, majoration en module, intégration par parties, changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral.