Partie 1 : Révisions

* Exercice 1 Exercice de base.

Donner des primitives des fonctions suivantes : $(x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1})$, $(x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2+x+1})$ et $(x \mapsto \dfrac{x}{x^2-5x+6})$.

* Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^x t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t(1+\ln(t))^3}\mathrm{d}t$

4. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$ 5. $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(2t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$ 6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$

* Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{1+2\cos(x)}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x}{\cos^3(x)}$
6. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^n(x)}$ où $n \in \mathbb{N}$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^1 \max(x, \frac{1}{3})\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^1 \left|x-\frac{1}{3}\right|\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\mathrm{d}x$ (IPP)

** Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}dt$, $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$,

$$\int_0^x \frac{\tan(t)}{1+\sin^2(t)}dt, \quad \int_0^x \sqrt{4-t^2}dt, \quad \int_0^x \sqrt{t^2-4}\, dt$$

* * * Exercice 5 Dans tout l'exercice, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\, dt$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer la dérivée de f.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que f admet en zéro la limite $\dfrac{\ln(2)}{2}$. En déduire que f se prolonge par continuité en zéro.

* Exercice 6 On définit une fonction f par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$.

Déterminer son ensemble de définition, et justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Montrer que, pour $x \neq 0$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (changement de variables). En déduire que f est identiquement nulle.

♡ ** Exercice 7 Déterminer l'ensemble de définition/dérivation de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

$$F_1(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt, \qquad F_2(x) = \int_{-3}^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt, \qquad F_3(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$$

♡ * Exercice 8 **Grand classique : Lemme de Lebesgue.**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0$.

♡ * Exercice 9 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}dt$. Donner un développement limité à l'ordre 4 en 0.

** **Exercice 10** Soit p et q des entiers de $\mathbb{N}$, on pose $B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. On suppose $p \geq 1$, montrer que $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $B(0,n)$ et en déduire $B(p,q)$.
4. Donner la valeur de $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2q+1}(\cos x)^{2p+1}dx$. (Indication : poser $u = \sin^2(x)$) TOURNER LA PAGE
5. Montrer que $B(p,p) \leq (\frac{1}{4})^p$ et donner la limite de $(B(p,p))$.

* **Exercice 11** Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2n+k}{n^2+k^2}$
3. $u_n = n \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}$

* **Exercice 12** Trouver un équivalent (quand $n \to +\infty$) des suites suivantes :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+(n-k)^2}.$$

** **Exercice 13** Soit p un entier naturel, on souhaite montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Vérifier cette relation pour $p \in \{0,1,2,3\}$. Puis prouver le résultat annoncé en utilisant $\int_0^1 x^p dx$.

Partie 2 : Intégrales impropres (ou généralisées)

Exercice 14 Soit $\phi :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0;1]$, $\phi(x) = x^3 \sin(1/x)$.

1. Montrer que ϕ admet un prolongement continu sur $[0;1]$, on le note encore ϕ. Que vaut $\phi(0)$? Montrer que $\phi([0;1]) \subset [-1;1]$.
2. Pour tout réel $x \in [-1;1]$, on pose $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Montrer que f est continue par morceaux.
3. Pour tout entier n non nul, on pose $u_n = f \circ \phi(\frac{1}{n\pi})$ et $v_n = fo\phi(\frac{2}{(4n-1)\pi})$. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n). La fonction $f \circ \phi$ est-elle continue par morceaux ?

Exercice 15 On définit la fonction f continue et affine par morceaux sur $[0;+\infty[$ par :

- Pour tout entier n non nul, f est affine sur les intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ et $[n; n + \frac{1}{4^n}]$.
- Pour tout entier n non nul, $f(n - \frac{1}{4^n}) = f(n + \frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$.
- En dehors des intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ et $[n; n + \frac{1}{4^n}]$, f est nulle.

Montrer que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

Exercice 16 $\forall t \geqslant 1$, on pose $f(t) = \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $[1;+\infty[$ et que $\int_1^\infty f(t)dt$ converge.
2. Justifier l'existence de la constante d'Euler $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$.
3. Calculer $\int_1^\infty f(t)dt$ en fonction de γ.

Exercice 17 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} dx \qquad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{e^x - 1} dx \qquad I_3 = \int_1^{e} \frac{1}{\ln(u)} du$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{1}{u^\alpha (1+u)^\beta} du \qquad I_5 = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt \qquad I_6 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+2)\sqrt{1-t^2}} dt \qquad I_8 = \int_0^{1} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du \qquad I_9 = \int_0^{1} \frac{\ln(u)}{u^\alpha} du$$

Exercice 18 Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\frac{x}{1-e^{-x}}) \frac{e^{ax}}{x} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(x/2)$.

Exercice 20 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\lfloor x \rfloor} dx$.

Exercice 21 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt$.

Exercice 22 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\cos(1/t)}{t^2\sqrt{\sin(1/t)}} dt$. (Indication : changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 23 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{it}}{1+it} dt$ est-elle absolument convergente ? Convergente ?

Exercice 24 **Fonction Gamma** :

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
2. Montrer que pour réel $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n non nul.

Exercice 25 Donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice 26 Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + ... + (\ln(n))^2}$.

La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 27 Soit, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.
2. En posant $u = 1/x$, montrer que $I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - 1/u$, calculer I_1.
3. Calculer I_n.

Exercice 28 **Intégrale de Gauss** : On note $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Pour tout entier n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{1} (1-x^2)^n dx$ et pour n non nul, $K_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

1. Justifier la convergence de I.
2. Retrouver rapidement que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   En déduire que, pour tout entier n non nul, on a $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$ (indication : remarquer que la suite (I_n) décroit).
   En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
4. A l'aide d'un changement de variable, exprimer J_n en fonction des intégrales I_k.
   A l'aide du chnagement $x = \tan(t)$, exprimer K_n en fonction des I_k.
5. Montrer que pour tout réel x, on a : $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.
   En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $I_{2n+1} \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant I_{2n-2}$. Puis montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 29

1. Pour tout réel $x \in]0;\pi]$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin(x/2)}$.
   Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0;\pi]$.
2. Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t}{\sin(t/2)} dt$.
   Justifier l'existence de I_n. Calculer $I_{n+1} - I_n$; puis I_n.
3. Montrer que pour toute fonction g de classe C^1 sur un segment $[a;b]$, on a $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(x)\sin(\lambda x)dx = 0$.
4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et déduire des questions précédentes la valeur de I

Partie 3 : exercices issus de la banque CCINP

Exercice 30 (Analyse, ex 28) *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 31 (Analyse, ex 56) On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Partie 4 : Quelques exercices des écoles Centrales

Exercice 32 Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}\right) dx$.

Exercice 33 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, calculer $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1} dx$.

Exercice 34 Soit $a, b > 0$.

a. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b. Justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

Exercice 35 Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, continue, décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que la fonction f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si la suite (S_n) converge et que, dans ce cas, $\displaystyle\int_0^1 f = \lim_n S_n$.

Application. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$. On pourra considérer, par exemple, le polynôme $(X+1)^{2n} - 1$.

Exercice 36 Montrer que l'expression suivante est définie pour $x > 0$: $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{x + t} dt$. Etablir ensuite l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(x) - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 37 Calculer, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)} dt$.