Lycée Aristide Briand, PC, 2023/2024 **Programme de colle. Semaine n°6 : du 06/11 au 10/11/2023.**

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement.....

**Déroulement** : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessus) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement. Les exercices de calculs de probabilités porteront sur le programme de PCSI et sur les notions nouvelles figurant déjà dans le programme précédent (semaine 5).
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : exercices 101-105-107 et 112 de probabilités.

# Probabilités : Introductions aux probabilités discrètes

**1) Revoir le programme de PCSI sur dénombrements de calculs de probabilités.**

**2) Ensembles dénombrables, familles sommables** : voir le programme précédent.

**3) Probabilités discrètes : voir le programme précédent.**

**4) Variables aléatoires discrètes : Premier épisode.**

(a) **Généralités.**

Une variable aléatoire discrète $X$ est une application définie sur $\Omega$, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. L'univers $\Omega$ n'est en général pas explicité.
Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque $X$ est à valeurs réelles.
Loi $P_X$ d'une variable aléatoire discrète. La probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
On note $X \sim Y$ lorsque les variables $X$ et $Y$ suivent la même loin. Variable aléatoire $f(X)$.
Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

(b) **Variable aléatoire $X$ à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de $X$**

$X$ est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de $X$.

Théorème d'antirépartition : Pour $X$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

# Questions de cours

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- Les définitions du chapitre de probabilités discrètes DOIVENT être connues.
- Sous additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes.
- Théorème de continuité croissante (grandes lignes de la preuve).
- Etre capable de dire ce que l'on admet du modèle décrivant l'expérience "on tire indéfiniment à Pile ou Face".
- L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle.
- **Exercice type** : On a $n$ urnes $U_1, \cdots, U_n$. L'urne $U_i$ contient $a_i$ boules blanches et $b_i$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une ou plusieurs boules de cette urne, avec remise.
  Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche ?
  Quelle est la probabilité que les 10 premières boules tirées soient blanches ?
  On suppose que la première boule tirée est blanche. Quelle est alors la probabilité de l'avoir tirée dans la première urne ?