Grands classiques

* **Exercice 1** Soit (u_n) une suite réelle monotone.
Montrer que : si (u_n) admet une suite extraite convergente, alors (u_n) converge.

♡ ♡**Exercice 2** **Série harmonique et constante d'Euler.**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
2. Etudier la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (u_n) est convergente. On note γ sa limite, qui est aussi appelée « constante d'Euler ».
4. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
5. On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)}$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{a}{2k} + \frac{b}{2k+1}$.
   (b) Utiliser ce qui précède pour trouver la limite de (w_n).
6. On pose $t_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Trouver la limite de (t_n).

** **Exercice 3** Soient a et b deux réels ($b > a > 0$). On pose $u_0 = a,\ \ v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2},\quad v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
3. Calculer $v_n^2 - u_n^2$. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
4. Soit ϕ appartenant à $]0, \Pi/2[$ tel que $a = b\cos(\phi)$. Calculer u_n et v_n en fonction de n et ϕ (On commencera par calculer et simplifier $u_1, v_1, u_2, v_2, ...$).
5. Simplifier $v_n \times \sin(\phi/2^n)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ en fonction de ϕ.
6. *** Application : On considère un polygone régulier de 2^n côtés, de périmètre égal à 1, et on note a_n et b_n les rayons respectifs des cercles inscrits et circonscrits.
   (a) Calculer a_n et b_n et montrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$.
   (b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, que l'on précisera.
   (c) Déduire simplement deux suites (u_n) et (v_n) dont la limite commune est π.
   Majorer $|u_n - v_n|$ et en déduire une valeur de n permettant d'obtenir un encadrement de π de longueur inférieure à 10^{-20}.

Utilisation des définitions et théorèmes généraux

* **Exercice 4** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que : si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que : si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Peut-on conclure si $\ell = 1$?
2. Appliquer ces résultats aux exemples qui suivent :
   $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ \ v_n = \frac{n^n}{n!}$, $\ \ w_n = \frac{a^n}{n^p}$ avec $a \in \mathbb{R},\ a > 1$ et $p \in \mathbb{N}$.

♡ * **Exercice 5** Montrer que les deux suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ convergent vers une limite commune. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

♡ * **Exercice 6** Déterminer les limites des suites définies par :

1. $u_n = \ln(\mathrm{ch}(n)) - n$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ (penser aux sommes de Riemann)
3. $u_n = \left(2a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$
4. $u_n = \left(\dfrac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)}\right)^{n^2}$.
   Indication : Penser que, pour $x > 0$, on a Arctan(x)+Arctan$(1/x)$=...

*__Exercice 7__ Donner un équivalent simple des suites suivantes : $u_n = \ln(n+\sqrt{n^2+1})$, $\quad v_n = \sin\left(\dfrac{(n^2+n+1)\pi}{n+1}\right)$

♡ ** **Exercice 8** Donner les limites des suites suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.
2. $v_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n}dx$ et $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}dx$

** **Exercice 9** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Suites récurrentes

* **Exercice 10** Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$.

* **Exercice 11** Etudier la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

** **Exercice 12** Etant donné a réel strictement positif, on considère la suite définie par :

$$u_1 = \ln(a) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\},\ u_n = \ln(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a-u_k)$$

1. Question préliminaire : montrer que : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x-1$.
2. Vérifier que la suite (u_n) est une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et préciser f.
3. Montrer que l'intervalle $I =]-\infty, a-1]$ est stable par f.
4. Etudier la suite (u_n).

Suites définies de manière implicite

♡** **Exercice 13** Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrez que : $\forall n \geq 1$, on a $x_n < 1$.
3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Conclure sur la convergence éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est la valeur de sa limite ?
4. Dans la suite de l'exercice, on note $\alpha_n = 1 - x_n$.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-\alpha_n)}{\alpha_n} = -1$
   (b) Montrer que : $n\alpha_n \sim -\ln(\alpha_n)$.
   (c) Quelle est la limite de $-\ln(\alpha_n)$?
   (d) En déduire enfin que : $-\ln(n) \sim \ln(\alpha_n)$ puis un équivalent simple de α_n.

*** **Exercice 14** Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note P_n le polynôme défini par : $P_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, que l'on notera x_n. Puis montrer que $0 < x_n \leq 1$.
2. Calculer $P_{n+1}(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) est convergente. Soit $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer que : $\exists r \in]0, 1[$ tel que $\forall n \geq 2$, $0 < x_n < r$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$.
4. En déduire que $\ell = 1/2$.
5. On pose $x_n = (1/2) + u_n$. Montrer que pour $n > 1$, $0 < u_n < \dfrac{1}{2^n}$. Enfin, montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

♡** __Exercice 15__ (Grand classique) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction réelle ϕ_n définie pour $x \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ par : $\phi_n(x) = \tan(x) - x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$. (Indication : pour tout n, on pourra étudier les variations de ϕ_n)
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. On pose $v_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - x_n$. Calculer $\tan(v_n)$. En déduire que $v_n = \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ et que $v_n \sim \dfrac{1}{n\pi}$, puis que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercices issus de la banque CCINP

Analyse, exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Analyse, exercice 43 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Analyse, exercice 55 Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.