Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessus) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : exercices 28 et 56 d'analyse.

Intégration : Premier épisode

1. **Réviser le programme de PCSI** : intégrale définie sur un segment, calculs de primitives et d'intégrales.
2. **Fonctions continues par morceaux.**
   Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
3. **Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme** $[a,+\infty[$
   Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $g \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.
4. **Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque**
   Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
   Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
   Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. *L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure* que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.
5. **Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**
   Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. (L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.)
   Inégalité triangulaire.
   Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente. Notations $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
   Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Si f est **continue**, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.
   Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

   Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
   Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
   - intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
   - étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

   L'intégrabilité de $t \mapsto \ln(t)$ en 0 peut être directement utilisée.

Questions de cours

- Définition d'une fonction continue par morceaux
- théorème de comparaison pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $f \leqslant g$ (énoncé +dem)
- Intégrales de référence : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$.
- Justifications d'une intégration par parties sur une intégrale généralisée. (énoncé)