

Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} \quad D_3 = \det(A) \text{ où } \begin{cases} A = (a_{i,j})_{(i,j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2} \\ \text{avec } a_{i,j} = ij \text{ pour } (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \end{cases}$$

Exercice 2 Calculer $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$ où a, b, c sont dans \mathbb{K} .

Exercice 3 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Montrer que la matrice P est inversible.

Calculer AP , en déduire $\det(AP)$ puis $\det(A)$.

Exercice 4 (Récurrence) . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où :

$m_{1,1} = \cos \alpha$ et $m_{i,i} = 2 \cos \alpha$ si $i \geq 2$

$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 1$ si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

Calculer $D_n = \det(M_n)$.

Exercice 5 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq c$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les 3 déterminants (d'ordre n) :

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ c & b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & c & b \end{vmatrix} \quad B_n = \begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ b & b & a & & a \\ \vdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & b \end{vmatrix} \quad C_n = \begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ c & b & a & & a \\ \vdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ c & \dots & \dots & c & b \end{vmatrix}$$

On pose $A_0 = B_0 = C_0 = 1$ et $A_1 = B_1 = C_1 = b$.

1. Montrer que pour tout entier n non nul, $A_{n+1} = bA_n - acA_{n-1}$.
En déduire une expression de A_n en fonction de l'entier n .
2. Calculer B_n en soustrayant la dernière colonne aux autres.
3. Soit J_n la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on pose $P_n(x) = \det(C_n + xJ_n)$.
Montrer que P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
A l'aide de 2 valeurs particulières de P_n , déterminer la valeur de C_n .

Exercice 6 Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix}$
2. On suppose que A et B commutent. Déterminer alors une relation entre $\det(A^2 + B^2)$ et $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$

Exercice 7 Soient A, B, C, D , 4 matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On suppose que $CD = DC$ et que D est inversible.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(M)$.

Exercice 8 (Oral) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{C}$, soit $A_p(\theta)$ la matrice $(\theta^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq p}$.

1. Calculer $\det A_p(\theta)$ pour $2 \leq p \leq 8$.
2. Déterminer les $\theta \in \mathbb{C}$ tels que $\det A_p(\theta) = 0$.

Exercice 9 Soit A une matrice de rang 1.

Montrer que A est semblable à une matrice dont les $(n-1)$ premières colonnes sont nulles.

En déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$ et $\det(I + A) = 1 + \text{tr}(A)$

Exercice 10 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E .

On note p le projecteur sur F parallèlement à G , et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Calculer la trace et le déterminant de p et de s , en fonction des dimensions de F et G .

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

On définit l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par la relation suivante :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Calculer $\det(f)$ et $\text{tr}(f)$.

Exercice 12 Pour tout polynome $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = Q$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.

Exercice 13 La famille $((2, 1, 0), (1, 3, 1), (5, 2, 1))$ est-elle libre ?

Si elle est libre, quelle est son orientation en tant que base de \mathbb{R}^3 , la base de référence étant la base canonique.

Partie 2 : Exercices issus de la banque CCINP

Exercice 14 (Ex 63, Algèbre)

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n .
3. La matrice A_n est-elle inversible ?