Programme de colle. Semaine n°8 : du 20/11 au 24/11/2023.

Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessus) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : exercice 28 d'analyse.

Intégration : Premier épisode

1. **Réviser le programme de PCSI** : intégrale définie sur un segment, calculs de primitives et d'intégrales.
2. **Fonctions continues par morceaux.** Voir le programme précédent.
3. **Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme** $[a,+\infty[$: Voir le programme précédent.
4. **Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque** : Voir le programme précédent et **ajouter le théorème de changement de variable ci-dessous** :

   si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.
   Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
   On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

5. **Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables** : Voir le programme précédent et **ajouter ce qui suit.**

   Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.
   Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Questions de cours

- Calculs type à savoir faire : $\int_0^X \dfrac{dt}{t^2+t+1}$, $\int_a^X \dfrac{dt}{t^2-5t+6}$.
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Etre capable d'énoncer avec préciser les divers théorèmes de comparaison permettant de conclure à la convergence ou à la divergence d'une intégrale impropre.
- théorème de comparaison pour montrer la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $f \leqslant g$ (énoncé +dem)
- Intégrales de référence (énoncé et démonstration) : $\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$, $\int_1^\infty \dfrac{1}{t^\alpha}dt$, $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^1 \dfrac{1}{t^\alpha}dt$, $\int_a^b \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}dt$, et $\int_a^b \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}dt$, $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$.
- Justifications d'une intégration par parties sur une intégrale généralisée. (énoncé)
- théorème de changement de variable