Programme de colle. Semaine n°9 : du 27/11 au 01/12/2023.

Déroulement : La colle comporte :

- **Pour les 3/2** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme. Une question de cours (cf ci-dessous) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisement.
- **Pour les 5/2** : la question de cours peut être remplacée par un exercice suivants de la banque CCINP : exercices 67-69-70-72-73 d'algèbre.

I : Révisions et compléments sur les déterminants.

1. **Revoir le programme de PCSI**. Pour rappel, il est en ligne sur cahier-de-prepa.fr, ainsi que le poly de cours.
2. **Compléments** : Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, déterminant de Vandermonde et lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

II : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. **Éléments propres.**

   Droite stable par un endomorphisme.

   Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.

   Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

   Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v. En particuler, le noyau de u est stable par v.

   Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. Notation $\mathrm{Sp}(u)$.

   La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

   Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

   Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

   Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.

2. **Polynôme caractéristique.** Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. (Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.)

   Notations χ_A, χ_u.

   Coefficients de degrés 0 et $n-1$.

   Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

   Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.

   Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

   Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

   Théorème de Cayley-Hamilton. (La démonstration n'est pas exigible.)

3. **Diagonalisation en dimension finie**

   Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.

   Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.

   Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

   Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

   Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Exemple des projecteurs et des symétries.

   Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Traduction matricielle.

   Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité. Traduction matricielle.

   Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Traduction matricielle.

II : Questions de cours

1. Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem)
2. Valeur propre et polynome annulateur (dem)
3. Polynome caractéristique d'une matrice par blocs (dem)
4. Multiplicité d'une valeur propre et dimension d'un sous-espace propre (dem)
5. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables (avec les dimensions des sous espaces propres (dem))
6. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables (avec le polynome caractéristique (dem))