Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Sans calcul, donner deux vecteurs propres et deux valeurs propres associés de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 2 Expliquer sans calcul, pourquoi $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit V la matrice colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1. Calculer JV.
Montrer que J est diagonalisable et donner une matrice D diagonale semblable à J.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}^5$, muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ et φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in [\![1, 5]\!], \varphi(e_i) = 2^{i-1} e_{6-i}$$

1. Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
2. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 6 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lorsque $x + y + z = 0$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que M soit diagonalisable.

Exercice 7 On considere la matrice de taille n : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynome caractéristique de A. En déduire A^n.
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
2. Montrer que n est nécessairement pair.
3. Calculer le déterminant et la trace de A.

Exercice 11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$.
Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 12 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

1. Les matrices A et A^2 sont elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 Soit E l'ensemble des suites réelles.
Pour toute suite (u) de E, on définit la suite $v = T(u)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme T.

Exercice 14 Soit $a > 0$ et $S_a : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S_a(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $f : t \mapsto \sin(\pi t/a)$. Calculer $S_a(f)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que S_a n'est ni injective ni surjective.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que S_a induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté s_a.
5. Montrer que s_a est un automorphisme.
6. Montrer que dans une base bien choisie, la matrice de s_a est triangulaire supérieure.
7. L'endomorphisme de s_a est-il diagonalisable ?

Exercice 15 Polynome caractéristique d'un produit.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. l'objectif de l'exercice est de démontrer que AB et BA ont le même polynome caractéristique.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que A est inversible.
Montrer que AB et BA sont semblables. Conclusion ?
2. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres. Cela permet-il de conclure ?
3. Dans cette question, on suppose que $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r \leqslant n$
En décomposant la matrice B par blocs, démontrer le résultat.
4. Cas général : On note $r = rg(A)$.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $PAQ = J_r$.
Démontrer le résultat.

Exercice 16

Soient $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ et C_P la matrice compagnon : $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que C_P est de rang n si $a_0 \neq 0$ et de rang $n-1$ si $a_0 = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{rg}(C_P - \lambda I_n) \geqslant n-1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P.
3. Montrer que $\chi_{C_P} = (-1)^n P$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.
4. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$. Si $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k^q)^{m_k}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 17 Soit α un nombre complexe. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonaliser A dans le cas où elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 18 Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 19 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Construire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 20 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ -15 & -9 & -5 & -12 \end{pmatrix}$

On admet que le polynome caractéristique de A est $(X-1)^2(X-2)^2$.

Construire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & * & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valeurs numériques données :

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 & 8 \\ 21 & 9 & 11 & 19 \\ 21 & 9 & 11 & 19 \\ -30 & -12 & -16 & -27 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 Commutant d'un endomorphisme à valeurs propres simples.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
2. En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.
3. Montrer qu'il existe un unique n–uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 id + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
4. Déterminer la dimension du commutant de f.

Exercice 22 Matrice circulante.

Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de J. En déduire la valeur de J^n.
2. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. Calculer J^k pour k plus petit que n.
4. Trouver un polynôme P tel que $P(J) = A$.
5. En déduire la valeur du déterminant de A.

Exercice 23 Diagonalisation par blocs.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

1. Étude du cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable ; donner ses valeurs propres.
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de B et donner la dimension de l'espace propre associé.
   (c) Soit λ une valeur propre de A, associée à un vecteur propre X. Trouver un vecteur propre de B.
   (d) La matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang n. On traitera le cas où A possède n valeurs propres distinctes, puis le cas où A possède des valeurs propres multiples.

Partie 2 : Exercices issus de la banque CCINP

Exercice 24 (ex 59, algebre)
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 25 (ex 67, algebre) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 26 (ex 69, algebre). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 27 (ex 70, algebre)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 28 (ex 72, algebre)
Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 29 (ex 73, algebre)
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

Exercice 30 (ex 83, algebre)
Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v dÃ©finis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

<u>Exercice 31</u> (ex 88, algebre)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E dÃ©finie par $a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$.

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

   (a) Prouver que le polynome $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).